Introducción a Teoría de conjuntos

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

17 de febrero de 2022

Información General

- Información en linea
  - contenido: https://tinyurl.com/4f5m9ekc
  - página del curso: http://dep.fie.umich.mx/~job/cursos/13

Información General

- Información en linea
  - contenido: https://tinyurl.com/4f5m9ekc
  - página del curso: http://dep.fie.umich.mx/~job/cursos/13
- Avisos
  - Se harán en clase y a través del correo institucional. Es responsabilidad del estudiante revisar constantemente.

Información General

- Información en linea
  - contenido: https://tinyurl.com/4f5m9ekc
  - página del curso: http://dep.fie.umich.mx/~job/cursos/13
- Avisos
  - Se harán en clase y a través del correo institucional. Es responsabilidad del estudiante revisar constantemente.
- Contacto
  - email: jose.ortiz@umich.mx
  - Oficina: Departamento de estudios de posgrado, Edificio Omega II

Información General

- Información en linea
  - contenido: https://tinyurl.com/4f5m9ekc
  - página del curso: http://dep.fie.umich.mx/~job/cursos/13
- Avisos
  - Se harán en clase y a través del correo institucional. Es responsabilidad del estudiante revisar constantemente.
- Contacto
  - email: jose.ortiz@umich.mx
  - Oficina: Departamento de estudios de posgrado, Edificio Omega II
- Etiqueta en clase
  - No usar celular
  - Se puede salir/entrar sin preguntar (discretamente)
  - No fotos

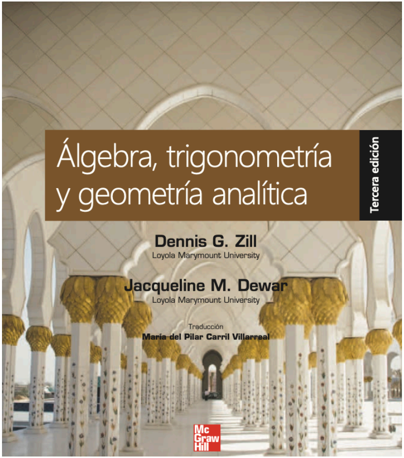
Libro de texto

Álgebra, trigonometría y geometría analítica

Tercera Edición

Denis G. Zill
Jacqueline M. Dewar

Mc Graw Hill



Evaluación

- 90 % Exámenes
  - Examen 1 - Capítulos 1 (Desigualdades)
  - Examen 2 - Capítulo 2 (Números Complejos)
  - Examen 3 - Capítulos 3 y 4 (Polinomios y fracciones parciales)
  - Examen 4 - Capítulos 5-6 (Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices y Determinantes)
- 10 % Tareas
- Asistencia
  - Derecho a presentar examen Extra $\geq 80\,\%$
  - Derecho a presentar examen Adicional $\geq 60\,\%$
- $-100\,\%$ copias y plagio

Conjuntos y elementos

La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor (1845-1918), quien desarrolló la parte principal de la teoría como un subproducto de sus investigaciones sobre series trigonométricas.

- Intuitivamente cuando agrupamos objetos según una característica particular estamos definiendo un conjunto
- Los objetos agrupados se llaman **elementos** y decimos que éstos pertenecen al **conjunto**.

Conjuntos y elementos

Notación y Pertenencia

- En general representamos los elementos con letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z y los conjuntos con letras mayúsculas A, B.
- $a \in A$ expresa que a pertenece a A
- $b \notin A$ expresa que v no pertenece a A

Definición de Conjuntos

Por extensión

Para expresar un conjunto por extensión, se deben enumeran todos sus elementos separados por con comas y entre llaves $\{\cdots\}$.

- $A = \{1, 3, 5, 7\}$

Definición de Conjuntos

Por compresión

Se elige una variable que x que representa un elemento arbitrario y se señala que cumple una propiedad $P(x)$. De igual forma se encierra entre llave.

- $A = \{x|xP(x)\}$

Se lee todos los elementos x tal que cumplen la propiedad $P(x)$.

Definición de Conjuntos

Especifique como están definidos los siguientes conjuntos y escríbalos en la otra notación

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Definición de Conjuntos

Especifique como están definidos los siguientes conjuntos y escríbalos en la otra notación

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ **por extensión**

Definición de Conjuntos

Especifique como están definidos los siguientes conjuntos y escríbalos en la otra notación

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ **por extensión**
- $A = \{x|$ es un número entre 1 y 4$\}$
- $B = \{x|$es una vocal$\}$

Definición de Conjuntos

Especifique como están definidos los siguientes conjuntos y escríbalos en la otra notación

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ **por extensión**
- $A = \{x|$ es un número entre 1 y 4$\}$
- $B = \{x|$es una vocal$\}$ **por compresión**
- $B = \{a, e, i, o, u\}$

Definición de Conjuntos

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para indicar A y B son iguales se escribe:

- $A = B$
- Los siguientes conjuntos son iguales
  - $A = \{x | x^2 = 4\}$
  - $B = \{x|$ es un número par diferente de 0 entre -3 y $3\}$

Definición de Conjuntos

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para indicar A y B son iguales se escribe:

- $A = B$
- Los siguientes conjuntos son iguales
  - $A = \{x | x^2 = 4\}$
  - $B = \{x |$ es un número par diferente de 0 entre -3 y $3\}$
  - $A = B = \{-2, 2\}$

Conjuntos y elementos

Ejercicios

En los problemas 1 a 10, escriba los conjuntos dados por extensión, cuando sea posible.

1. $A = \{x \mid x \text{ es un número real y } x^2 = 0\}$
2. $B = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra agricultor}\}$
3. $C = \{x \mid x \text{ es un número entero comprendido entre } -1 \text{ y } 1\}$
4. $D = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par menor que } 15\}$
5. $E = \{x \mid x \text{ es un entero positivo tal que } 4 + x = 3\}$
6. $F = \{x \mid x \text{ es un número positivo par}\}$
7. $G = \{x \mid x \text{ es un múltiplo entero de } 5\}$
8. $H = \{x \mid x \text{ es un país del continente americano cuyo nombre comienza con } P\}$.
9. $I = \{x \mid x \text{ es el rector de su universidad}\}$
10. $J = \{x \mid x \text{ es uno de sus profesores}\}$

En los problemas 11 a 20, escriba por comprensión los conjuntos dados.

11. $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$
12. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$
13. $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$
14. $D = \{\text{a, b, c, d, e}, \ldots, \text{x, y, z}\}$
15. $E = \{4, 9, 16, \ldots\}$
16. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
17. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
18. $H = \{-2, 2\}$
19. $I = \{\text{Santo Domingo}\}$
20. $J = \{\,\}$

Cardinalidad y tipos de conjuntos

finito/infinito

Hay conjuntos que tienen un número finito de elementos; se llaman **conjuntos finitos**. Un conjunto que no tiene un número finito de elementos se llama un **conjunto infinito**.

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (finito)
- $B = \{x | x \text{ es un entero mayor que } 5\}$

Cardinalidad y tipos de conjuntos

Cardinalidad e equipotencia

- El número de elementos en un conjunto finito se denomina **cardinalidad** del conjunto y se denota por $|A|$
- Dos conjuntos finitos A y B son **equipotentes** si contienen el mismo número de elementos.

Cardinalidad y tipos de conjuntos

Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$

Cardinalidad y tipos de conjuntos

Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $|A| = 4$
- $B = \{x | x \text{ es un entero primo entre 10 y 20}\}$

Cardinalidad y tipos de conjuntos

Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $|A| = 4$
- $B = \{x | x \text{ es un entero primo entre } 10 \text{ y } 20\}$
  - $B = \{11, 13, 17, 19\}$ $|B| = 4$
- $C = \{a, b, b, c\}$

Cardinalidad y tipos de conjuntos

Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $|A| = 4$
- $B = \{x | x$ es un entero primo entre 10 y 20$\}$
  - $B = \{11, 13, 17, 19\}$ $|B| = 4$
- $C = \{a, b, b, c\}$ $|C| = 3$ solo se cuentan los elementos distintos.

Cardinalidad y tipos de conjuntos

Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $|A| = 4$
- $B = \{x|x$ es un entero primo entre 10 y 20$\}$
  - $B = \{11, 13, 17, 19\}$ $|B| = 4$
- $C = \{a, b, b, c\}$ $|C| = 3$ solo se cuentan los elementos distintos.
- A y B son equipotentes.

Cardinalidad y tipos de conjunto

Vacío/unitario/universal

- El conjunto **vacío** es el que no contiene elementos. Se representa como $A = \emptyset$ o $A = \{\}$.
- Se dice que un conjunto A es un conjunto **unitario** si contiene un único elemento.
  - $B = \{x | x \text{ es la capital del estado de Michoacán}\}$
- Representa el total de todos lo elementos bajo estudio. Este conjunto es llamado conjunto **universal** y se denota como U.

Tipos de conjuntos

Subconjuntos

Si cada elemento en A es también un elemento B, entonces se dice que A es un **subconjunto** de B. También se puede decir que A está contenido en B o que B contiene a A. Se puede escribir de la siguientes formas:

- $A \subset B$
- $B \supset A$

Tipos de conjuntos

Subconjuntos

Si cada elemento en A es también un elemento B, entonces se dice que A es un **subconjunto** de B. También se puede decir que A está contenido en B o que B contiene a A. Se puede escribir de la siguientes formas:

- $A \subset B$
- $B \supset A$

Tipos de conjuntos

Subconjuntos

- Si $A = B$ entonces se cumple que $A \subset B$ y $B \subset A$
- Si A es un subconjunto de B, pero $A \neq B$ se dice que A es un subconjunto propio de B
- Si A no es un subconjunto de B se expresa como $A \not\subset B$

Tipos de conjuntos

Subconjuntos

- Si tiene los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{1, 3\}$. Entonces tiene:
  - $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$
  - $C \subset A$ y $C \not\subset B$

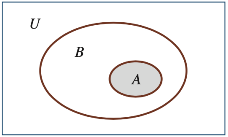
Tipos de conjuntos

Comparación de conjuntos

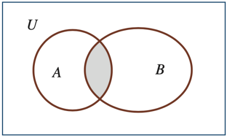
Para cualquier par de conjuntos A y B se mantiene:

- $\emptyset \subset A \subset U$
- $A \subset A$
- Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
- $A = B$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

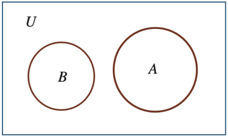
Conjuntos y diagramas de Venn



(a) $A \subset B$



(b) $A \cap B$



(c) Disjuntos

Figura: Comparación de conjuntos

Operaciones con conjuntos

Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que ocurren en ambos conjuntos. La intersección de A y B, se denota como: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Operaciones de conjuntos

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para la intersección de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

***a*)** $A \cap B = B \cap A$, propiedad conmutativa.

***b*)** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, propiedad asociativa.

***c*)** $A \cap U = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

***d*)** $\varnothing \cap A = \varnothing$, propiedad de la existencia de un elemento absorbente.

Operaciones de conjuntos

Intersección

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cap B =$

Operaciones de conjuntos

Intersección

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- $A \cap C =$

Operaciones de conjuntos

Intersección

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C =$

Operaciones de conjuntos

Intersección

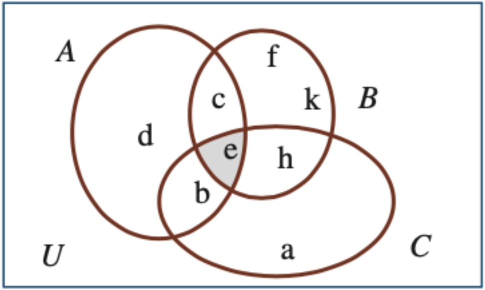
Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = \{2, 4\}$

Operaciones de conjuntos

Intersección

Dados los conjuntos $A = \{b, c, d, e\}$, $B = \{c, e, h, f, k\}$ y $C = \{a, b, e, h\}$.



$$A \cap B \cap C$$

Operaciones con conjuntos

Unión

La unión de dos conjuntos A y B es la combinación de todos los elementos que pertenecen a A o B en un solo conjunto. Se denota como: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Operaciones de conjuntos

PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE DOS CONJUNTOS

Las siguientes propiedades se cumplen para la unión de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

***a*)** $A \cup B = B \cup A$, propiedad conmutativa.

***b*)** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, propiedad asociativa.

***c*)** $A \cup \varnothing = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

***d*)** $A \cup U = U$, propiedad de la existencia del conjunto absorbente.

Operaciones de conjuntos

Unión

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cup B =$

Operaciones de conjuntos

Unión

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- $A \cup C =$

Operaciones de conjuntos

Unión

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $B \cup C =$

Operaciones de conjuntos

Unión

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cup B \cup C =$

Operaciones de conjuntos

Unión

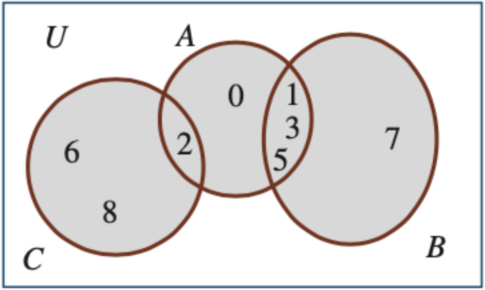
Dados los conjuntos $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $C = \{2,4,6\}$.

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$
- $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Operaciones de conjuntos

Intersección

Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 6, 8\}$.



Operaciones de conjuntos

PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para las operaciones de unión e intersección de conjuntos.

***a*)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección.

***b*)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.

Operaciones con conjuntos

Diferencia

La diferencia o complemento relativo entre dos conjuntos A y B es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen A pero no a B. Se denota como $A - B$.

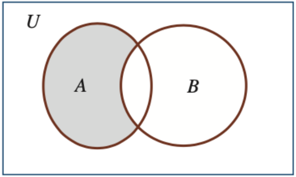
$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Operaciones con conjuntos

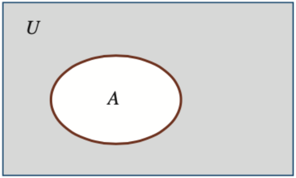
Complemento

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

El complemento de un conjunto A, se especifica como A' o A^c, y es el conjunto $U - A$.



$A - B$



$A' = U - A$

Operaciones de conjuntos

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes, llamadas *leyes de De Morgan*, se cumplen para conjuntos A y B que son subconjuntos del conjunto universal U:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Operaciones de conjuntos

Diferencia

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A - B =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia

Dados los conjuntos $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $C = \{2,4,6\}$.

- $A - B = \{7\}$
- $B - A =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A - B = \{7\}$
- $B - A = \{2, 4\}$
- $A - C =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A - B = \{7\}$
- $B - A = \{2, 4\}$
- $A - C = \{1, 3, 5, 7\}$
- $C - A =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

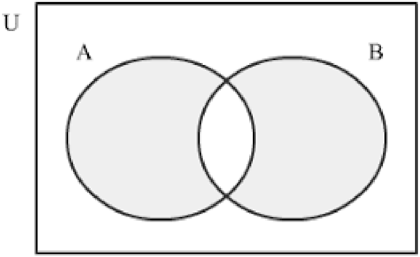
- $A - B = \{7\}$
- $B - A = \{2, 4\}$
- $A - C = \{1, 3, 5, 7\}$
- $C - A = \{2, 4, 6\}$

Operaciones de conjuntos

Diferencia simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por la unión de A y B, eliminando los elementos de la intersección entre A y B. Se denota por $A\Delta B$.

$$A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B) = (A - B)\cup(B - A)$$



Operaciones de conjuntos

Diferencia simétrica

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \Delta B =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia simétrica

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \Delta B = \{2, 4, 7\}$
- $A \Delta C =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia simétrica

Dados los conjuntos $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $C = \{2,4,6\}$.

- $A \Delta B = \{2,4,7\}$
- $A \Delta C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $B \Delta C =$

Operaciones de conjuntos

Diferencia simétrica

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.

- $A \Delta B = \{2, 4, 7\}$
- $A \Delta C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $B \Delta C = \{1, 3, 5, 6\}$

Operaciones de conjuntos

LEYENDAS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes idempotentes

1a. $A \cup A = A$ | **1b.** $A \cap A = A$

Leyes asociativas

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | **2b.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes conmutativas

3a. $A \cup B = B \cup A$ | **3b.** $A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | **4b.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de identidad y absorción

5a. $A \cup \varnothing = A$ | **5b.** $A \cap U = A$

6a. $A \cup U = U$ | **6b.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Ley involutiva

7a. $(A^c)^c = A$

Leyes del complementario

8a. $A \cup A^c = U$ | **8b.** $A \cap A^c = \varnothing$

9a. $U^c = \varnothing$ | **9b.** $\varnothing = U$

Leyes de De Morgan

10a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ | **10b.** $A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Conjuntos de números

Números naturales

El conjunto de los números naturales se denota como $\mathbb{N}$ y se representan como:

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

- El 1 es el primer número natural
- Si se restan o dividen dos números naturales, el resultado puede no ser un número natural. Por eso se dice que no son cerrados con respecto a esas operaciones.
- Si son cerrados para sumas y multiplicaciones.

Conjuntos de números

Enteros

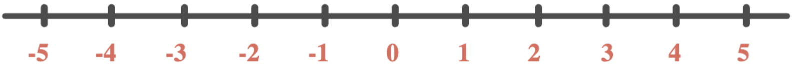
- Surgen de la necesidad de distinguir valores a partir de una posición de referencia (usualmente el 0) y se originan los números negativos. Por ejemplo temperatura -5 grados.
- Al conjunto formado por los enteros negativos, el cero y los naturales se le conoce como conjunto de los números enteros.
- Se escribe

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Conjuntos de números

Enteros

Son cerrados para las operaciones de suma, resta y multiplicación, pero no para la división.
Utilizamos la recta númerica para representarlos



Conjuntos de números

Racionales

Los números racionales son los números que resultan de división de dos enteros. Se denota el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} =$$

Conjuntos de números

Racionales

Los números racionales son los números que resultan de división de dos enteros. Se denota el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Conjuntos de números

Racionales

- Note que los racionales pueden ser enteros, decimales exactos/periódicos:
  - $10/5 = 2$
  - $3/2 = 1{,}5$
  - $1/3 = 0{,}3333\ldots$
- $\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$, de la misma forma que los naturales de los enteros.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Conjuntos de números

Irracionales

- No todos números decimales son exactos o periódicos, y por tanto, no todos los números decimales pueden ser expresados como la división de dos enteros.
- Estos últimos se caracterizan por tener cifras decimales no periódicas e infinitas, es decir, no tienen un patrón de repetición.
- Este conjunto de números son los irracionales y se les denomina con $\mathbb{I}$. Algunos ejemplos son π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$.

Conjuntos de números

Reales

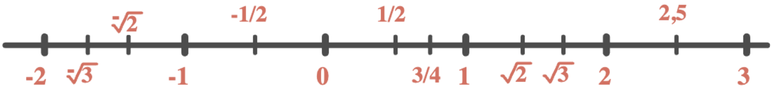
El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se conoce como conjunto de los reales y representa con $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

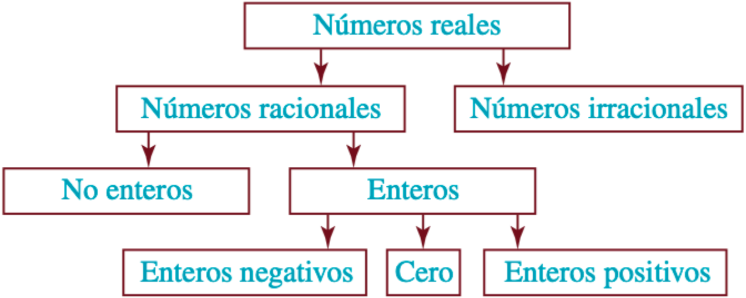
Conjuntos de números

Reales

- Los números reales podemos representarlos mediante puntos en una línea recta. Donde se define un punto llamado origen, para representar el 0 y otro punto a la derecha para representar el 1.
- Cada número real se corresponde con un único punto en la recta.



Conjuntos de los reales



Propiedades de los reales

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES

Adición	**Multiplicación**
1. Propiedades de cerradura	
i) $a + b$ es un número real	*ii*) $a \cdot b$ es un número real
2. Propiedades conmutativas	
i) $a + b = b + a$	*ii*) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Propiedades asociativas	
i) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*ii*) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Propiedades de identidad	
i) $a + 0 = 0 + a = a$	*ii*) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Propiedades del inverso	
i) $a + (-a) = (-a) + a = 0$	*ii*) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES (CONTINÚA)

6. Propiedades distributivas:

i) $a(b + c) = ab + ac$ *ii*) $(a + b)c = ac + bc$

Números Reales

Ejemplo: propiedades

Exprese una propiedad algebraica básica del sistema de los números reales para justificar cada uno de los enunciados siguientes, donde x, y y z son números reales.

a) $(6+8)y = y(6+8)$

b) $(3+5)+2 = 3+(5+2)$

c) $(x+3)y+2 = (xy+3y)+2$

d) $(x+y)\cdot 1 = x+y$

e) $(x+2)+[-(x+2)] = 0$

f) $(y+z)\dfrac{1}{y+z} = 1$, si $y+z \neq 0$

Números Reales

Ejemplo: propiedades

Exprese una propiedad algebraica básica del sistema de los números reales para justificar cada uno de los enunciados siguientes, donde x, y y z son números reales.

a) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$

b) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$

c) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$

d) $(x + y) \cdot 1 = x + y$

e) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$

f) $(y + z)\dfrac{1}{y + z} = 1$, si $y + z \neq 0$

Solución

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación $\leftarrow$ propiedad 2*ii*)

b) Propiedad asociativa de la adición $\leftarrow$ propiedad 3*i*)

c) Propiedad distributiva $\leftarrow$ propiedad 6*ii*)

d) Propiedad de identidad de la multiplicación $\leftarrow$ propiedad 4*ii*)

e) Propiedad del inverso de la adición $\leftarrow$ propiedad 5*i*)

f) Propiedad del inverso de la multiplicación $\leftarrow$ propiedad 5*ii*)

Números Reales

Diferencia y cociente

Para los números reales a y b, la **diferencia**, $a - b$, se define como

$$a - b = a + (-b)$$

Si $b \neq 0$ entonces el **cociente** a/b o $a \div b$ se define como

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Números Reales

Ejemplo: La sustracción no es asociativa

Derivado de que $1-(2-3)=2$ y $(1-2)-3=-4$ tenemos que

$$1-(2-3)\neq(1-2)-3$$

por lo tanto, la diferencia de números reales no es asociativa.

a) $(6+8)y = y(6+8)$

b) $(3+5)+2 = 3+(5+2)$

c) $(x+3)y+2 = (xy+3y)+2$

d) $(x+y)\cdot 1 = x+y$

e) $(x+2)+[-(x+2)] = 0$

f) $(y+z)\dfrac{1}{y+z} = 1$, si $y+z \neq 0$

Números Reales

Ejemplo: La sustracción no es asociativa

Derivado de que $1 - (2 - 3) = 2$ y $(1 - 2) - 3 = -4$ tenemos que

$$1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3$$

por lo tanto, la diferencia de números reales no es asociativa.

a) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$

b) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$

c) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$

d) $(x + y) \cdot 1 = x + y$

e) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$

f) $(y + z)\dfrac{1}{y + z} = 1$, si $y + z \neq 0$

Solución

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación ← propiedad 2*ii*)

b) Propiedad asociativa de la adición ← propiedad 3*i*)

c) Propiedad distributiva ← propiedad 6*ii*)

d) Propiedad de identidad de la multiplicación ← propiedad 4*ii*)

e) Propiedad del inverso de la adición ← propiedad 5*i*)

f) Propiedad del inverso de la multiplicación ← propiedad 5*ii*)

Números Reales

PROPIEDADES ADICIONALES

7. Propiedades de igualdad:

i) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para todo número real c.

ii) Si $a = b$, entonces $ac = bc$ para todo número real c.

8. Propiedades de la multiplicación por cero:

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$, $b = 0$, o ambas.

9. Propiedades de cancelación:

i) Si $ac = bc$, y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

ii) $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$, siempre que $c \neq 0$ y $b \neq 0$.

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

10. Propiedades de la sustracción y negativos:

i) $-(-a) = a$

ii) $-(ab) = (-a)(b) = a(-b)$

iii) $-a = (-1)a$

iv) $(-a)(-b) = ab$

Números Reales

Ejemplo: Cancelación y simplificación

- **Cancelación**
  1. Si $2x = 2y$, entonces $x = y$

Números Reales

Ejemplo: Cancelación y simplificación

- **Cancelación**
  1. Si $2x = 2y$, entonces $x = y$ $\leftarrow$ propiedad 9i
  2. Si
  $$\frac{36}{27} = \frac{4 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \frac{4}{3}$$
  propiedad 9ii
- **Simplificación**
  1. Simplifique -(4+x-y)

Números Reales

Ejemplo: Cancelación y simplificación

- **Cancelación**
  1. Si $2x = 2y$, entonces $x = y$ $\leftarrow$ propiedad 9i
  2. Si
  $$\frac{36}{27} = \frac{4 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \frac{4}{3}$$
  propiedad 9ii
- **Simplificación**
  1. Simplifique -(4+x-y)
  por la propiedad 10i $-(4+x-y) = -1(4+x-y)$
  utilizando la propiedad distributiva tenemos:
  $$\begin{aligned} -(4+x-y) &= -(4+x-y) = -1(4+x-y) \\ &= (-1)4 + (-1)x - (-1)y) \leftarrow 10(iii, iv) \\ &= -4 - x + y \end{aligned}$$

Números Reales

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

11. Fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

12. Regla de los signos:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

13. Adición o sustracción con denominadores comunes:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. Multiplicación:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

15. División:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},\ c \neq 0$$

Números Reales

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

16. División de cero y división por cero

i) $0 \div b = \dfrac{0}{b} = 0\,, \quad b \neq 0$

ii) $a \div 0 = \dfrac{a}{0}$ es indefinida, $a \neq 0$

iii) $0 \div 0 = \dfrac{0}{0}$ es indefinida

Números Reales

Ejemplo: Productos y cocientes

Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

a) $(-x)(-y)$

b) $\dfrac{-(-a)}{-b}$

c) $\dfrac{2(u+v)}{2v}$

d) $\dfrac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}$

e) $z \cdot \dfrac{0}{5}$

f) $\dfrac{w}{2-(5-3)}$

Números Reales

Ejemplo: Productos y cocientes

Solución

a) $(-x)(-y) = xy$ $\leftarrow$ por la propiedad 10*iv*)

b) $\dfrac{-(-a)}{-b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$ $\leftarrow$ por las propiedades 10*i*) y 12

c) $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$ $\leftarrow$ por la propiedad 9*ii*)

d) Para evaluar $y/(1/4 + 3/5)$, primero evaluamos el denominador:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(1)(5) + (4)(3)}{(4)(5)} = \frac{17}{20}. \quad \leftarrow \text{común denominador}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{y}{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}} = \frac{y}{\frac{17}{20}} = \frac{y}{1} \cdot \frac{20}{17} = \frac{20y}{17}. \quad \leftarrow \text{por la propiedad 15}$$

e) $z \cdot \dfrac{0}{5} = z \cdot 0 = 0$ $\leftarrow$ por la propiedad 8*i*)

f) La expresión $w/[2 - (5 - 3)]$ es indefinida, ya que su denominador es cero; es decir, $2 - (5 - 3) = 2 - 2 = 0$ [véase la propiedad 16*ii*)]. ≡

Números Reales

Notas finales

En la solución del inciso c) del ejemplo anterior, un error común es cancelar las letras v en el numerador y el denominador:

$$\frac{x+\cancel{v}}{\cancel{v}} = u$$

Practicar resolviendo los ejercicios de la página 56 y 57 del libro de texto.

Números Reales

Notas finales

En la solución del inciso c) del ejemplo anterior, un error común es cancelar las letras v en el numerador y el denominador:

$$\frac{x+\cancel{v}}{\cancel{v}} = u \leftarrow \textit{INCORRECTO}$$

No se puede realizar ninguna cancelación en la simplificación pues v no es factor multiplicativo tanto del numerador como del denominador, como lo requiere la propiedad $9ii$).

Números Reales

Notas finales

En la solución del inciso c) del ejemplo anterior, un error común es cancelar las letras v en el numerador y el denominador:

$$\frac{x + \cancel{v}}{\cancel{v}} = u \leftarrow \mathit{INCORRECTO}$$

No se puede realizar ninguna cancelación en la simplificación pues v no es factor multiplicativo tanto del numerador como del denominador, como lo requiere la propiedad 9*ii*).

Practicar resolviendo los ejercicios de la página 56 y 57 del libro de texto.