Desigualdades

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Febrero 2022

Solución de desigualdades

Desigualdad lineal

- Cualquier desigualdad que pueda escribirse de una de las formas:

$$ax + b < 0$$
$$ax + b > 0$$
$$ax + b \geq 0$$
$$ax + b \leq 0$$

  donde a y b son números reales, se llama desigualdad lineal.

Ejemplo 1

Resolvamos:

$$8x + 4 < 15 + 5X$$

Obtenemos desigualdades equivalentes aplicando los teoremas y equivalencias.

Desigualdades lineales

Ejemplo 1

$8x + 4 < 15 + 5x$

Desigualdades lineales

Ejemplo 1

$8x + 4 < 15 + 5x$

$-5x + 8x + 4 - 4 < 15 + 5x - 4 - 5x$

Desigualdades lineales

Ejemplo 1

$8x + 4 < 15 + 5x$

$-5x + 8x + 4 - 4 < 15 + 5x - 4 - 5x$

$3x < 12$

Desigualdades lineales

Ejemplo 1

$8x + 4 < 15 + 5x$

$-5x + 8x + 4 - 4 < 15 + 5x - 4 - 5x$

$3x < 12$

$3x/3 < 12/3$

Desigualdades lineales

Ejemplo 1

$8x + 4 < 15 + 5x$
$-5x + 8x + 4 - 4 < 15 + 5x - 4 - 5x$
$3x < 12$
$3x/3 < 12/3$
$x < 4$

Ejemplo 1

$8x + 4 < 15 + 5x$
$-5x + 8x + 4 - 4 < 15 + 5x - 4 - 5x$
$3x < 12$
$3x/3 < 12/3$
$x < 4$
En notación de conjuntos, el conjunto solución de la desigualdad dada es: $\{x|x \text{ es real y } x < 4\}$

Desigualdades lineales

Ejemplo 2

Resolvamos:

$$\frac{1}{2} - 3x \geq \frac{5}{2}$$

Las desigualdades siguientes son equivalentes (debe ser capaz de explicar cada paso):

Ejemplo 2

El conjunto solución esta dado por:

$$\{x|x \ es \ real \ y \ x \leq -\frac{2}{3}\}$$

Solución de desigualdades.

Desigualdad polinomial

Se conocen como **desigualdades polinomiales**. Las desigualdades que incluyen polinomios P(x) de grado arbitrario.

$$P(x) > 0,\ \ P(x) < 0,\ \ P(x) \geq \ \ y\ \ P(x) \leq \ \ 0$$

donde de grado $P(x)$ sera de grado n si $a_n \neq 0$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Recordemos

- Las **propiedades del signo de un producto** de números reales que se presentan a continuación son fundamentales para la solución de una desigualdad polinomial:
- Es decir, si los signos de los números son **(+)(+) o (-)(-)**, su producto será **positivo**, y si tienen signos diferentes **(+)(-) o (-)(+)**, su producto será **negativo**.

Desigualdades entre polinomios

Reglas para resolver desigualdades polinomiales

(I) Use las propiedades de las desigualdades para replantear las desigualdad dada en forma tal que todas las variable y constantes diferente de cero se encuentren del mismo lado de la desigualdad y el número 0 quede del otro lado.

Desigualdades entre polinomios

Reglas para resolver desigualdades polinomiales

(I) Use las propiedades de las desigualdades para replantear las desigualdad dada en forma tal que todas las variable y constantes diferente de cero se encuentren del mismo lado de la desigualdad y el número 0 quede del otro lado.

(II) Si es posible, factorice el polinomio $P(x)$ en factores lineales $ax + b$

Desigualdades entre polinomios

Reglas para resolver desigualdades polinomiales

(I) Use las propiedades de las desigualdades para replantear las desigualdad dada en forma tal que todas las variable y constantes diferente de cero se encuentren del mismo lado de la desigualdad y el número 0 quede del otro lado.

(II) Si es posible, factorice el polinomio $P(x)$ en factores lineales $ax + b$

(III) Identificar la recta numérica en los ceros reales del $P(x)$. Estos números dividen la recta en intervalos.

Desigualdades entre polinomios

Reglas para resolver desigualdades polinomiales

(i) Use las propiedades de las desigualdades para replantear las desigualdad dada en forma tal que todas las variable y constantes diferente de cero se encuentren del mismo lado de la desigualdad y el número 0 quede del otro lado.

(ii) Si es posible, factorice el polinomio $P(x)$ en factores lineales $ax + b$

(iii) Identificar la recta numérica en los ceros reales del $P(x)$. Estos números dividen la recta en intervalos.

(iv) En cada uno de los intervalos, determinar el signo de cada factor y luego determine el signo del producto.

Desigualdades entre polinomios

Ejemplo 1

Resuelva : $x^2 \geq 2x + 15$

Primero reescribimos la desigualdad con todos los términos a la izquierda del símbolo de desigualdad y el 0 a la derecha. Por las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo 1

$$\textbf{Resuelva} : x^2 \geq 2x + 15$$

Primero reescribimos la desigualdad con todos los términos a la izquierda del símbolo de desigualdad y el 0 a la derecha. Por las propiedades de las desigualdades.

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

Desigualdades entre polinomios

Ejemplo 1

$$x^2 - 2x - 15 \geq \ 0$$

Después de factorizar, la última expresión es igual a

Desigualdades entre polinomios

Ejemplo 1

$$x^2 - 2x - 15 \geq \; 0$$

Después de factorizar, la última expresión es igual a

$$(x+3)(x-5) \geq \; 0$$

A continuación indicamos en la recta numérica en qué punto cada factor es 0, en este caso,

Desigualdades entre polinomios

Ejemplo 1

$$x^2 - 2x - 15 \geq \ 0$$

Después de factorizar, la última expresión es igual a

$$(x+3)(x-5) \geq \ 0$$

A continuación indicamos en la recta numérica en qué punto cada factor es 0, en este caso,

$$x = -5, x = 3.$$

Igualdades entre polinomios

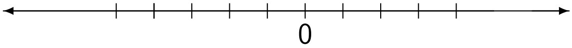
Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

Igualdades entre polinomios

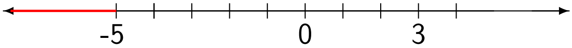
Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:



Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

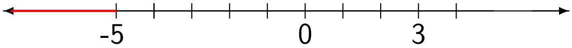


Igualdades entre polinomios

Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

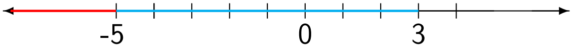
$$(-\infty, -5)$$



Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

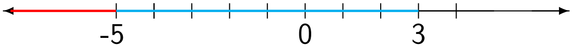
$$(-\infty, -5)$$



Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

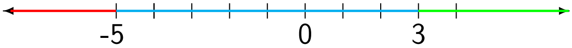
$$(-\infty,-5),(-5,3)$$



Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

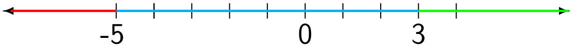
$$(-\infty, -5), (-5, 3)$$



Ejemplo 1.

esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección:

$$(-\infty, -5), (-5, 3) \ y \ (3, \infty)$$



Ejemplo 1

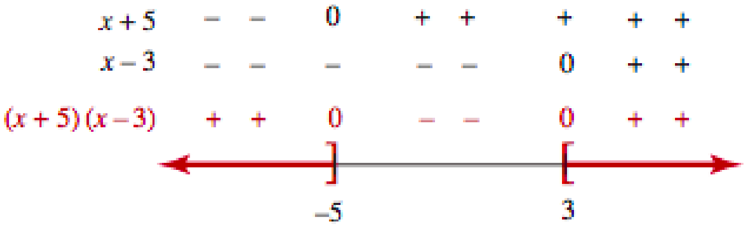
Puesto que los factores lineales x-5 y x+3 no pueden cambiar de signo dentro de estos intervalos, basta obtener el signo de cada factor en sólo un número de prueba elegido dentro de cada intervalo.por ejemplo:

Intervalo	$(-\infty, -5)$	
Signo de $x + 5$	$-$	$\leftarrow$ en $x = -10$, $x + 5 = -10 + 5 < 0$
Signo de $x - 3$	$-$	$\leftarrow$ en $x = 10$, $x - 3 = -10 - 3 < 0$
Signo de $(x + 5)(x - 3)$	$+$	$\leftarrow (-)(-)$ es $(+)$

Igualdades entre polinomios

Ejemplo 1.

- Continuando de esta manera con los dos intervalos restantes, obtenemos la tabla de signos. Como se observa en la tercera línea de esta figura el producto (x-5)(x+3) no es negativo los intervalos disjuntos no acotados $(\infty, -5]$ y $[3, \infty)$ por tanto **el conjunto solución es**

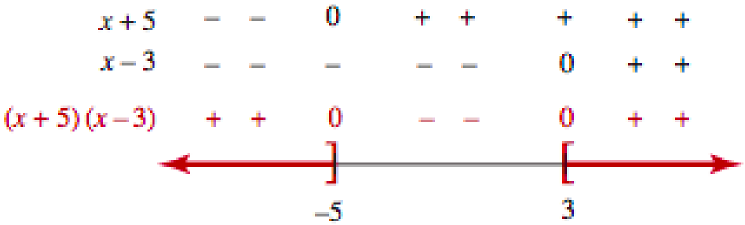


Igualdades entre polinomios

Ejemplo 1.

- Continuando de esta manera con los dos intervalos restantes, obtenemos la tabla de signos. Como se observa en la tercera línea de esta figura el producto (x-5)(x+3) no es negativo los intervalos disjuntos no acotados $(\infty, -5]$ y $[3, \infty)$ por tanto **el conjunto solución es**

$$(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$$



Ejemplo 2

$$\textit{Resuelva } x < 10 - 3x^2$$

Primero reescribimos la desigualdad poniendo todos los términos diferentes de 0 en el mismo lado:

Desigualdades entre polinomios cuadrática

Ejemplo 2

$$\textit{Resuelva } x < 10 - 3x^2$$

Primero reescribimos la desigualdad poniendo todos los términos diferentes de 0 en el mismo lado:

$$3x^2 + x - 10 < 0.$$

Al factorizar este polinomio cuadrático tenemos:

Ejemplo 2

$$\textit{Resuelva } x < 10 - 3x^2$$

Primero reescribimos la desigualdad poniendo todos los términos diferentes de 0 en el mismo lado:

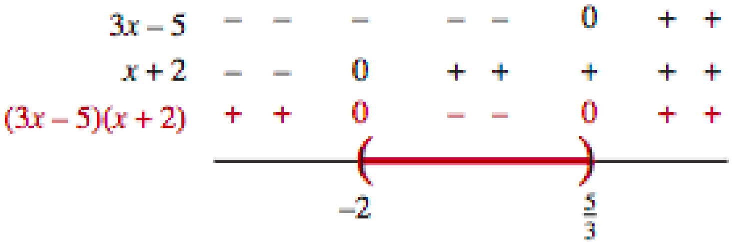
$$3x^2 + x - 10 < 0.$$

Al factorizar este polinomio cuadrático tenemos:

$$(3x - 5)(x + 2) < 0. \tag{1}$$

Ejemplo 2

- En el diagrama de signos vemos (en rojo) que este producto es negativo para los números del intervalo abierto **(-2, 5/3)** Por el símbolo estricto "menor que" de la desigualdad, los extremos de los números del intervalo no se incluyen en el conjunto solución.



Desigualdades entre polinomios

Ejemplo 3

$$\textit{Resuelva } (X-4)^2(X+8)^3 > 0$$

Ejemplo 3

$$\textit{Resuelva } (X-4)^2(X+8)^3 > 0$$

- En vista de que la desigualdad dada ya tiene la forma apropiada para el método de la tabla de signos (una expresión factorizada a la izquierda del símbolo de desigualdad y 0 a la derecha), primero debemos hallar los números donde cada factor es 0, en este caso, x=4 y x=-8

Ejemplo 3.

- Colocamos estos números en la recta numérica y determinamos tres intervalos. Luego, en cada intervalo consideramos los signos de las potencias de cada factor lineal (i.e. $x = 4$ y $x = -8$).

Desigualdades entre polinomios

Ejemplo 3.

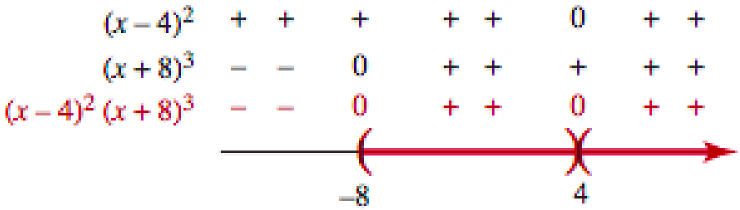
- nos damos cuenta que el producto de los factores

$$(x-4)^2(x+8)^3$$

no es negativo para los números del conjunto:

$$(-8,4)\cup(4,\infty)$$

Desigualdades entre polinomios



Solución de desigualdades.

Desigualdad racional

- se llaman **desigualdades racionales** al cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. En lo que respecta a las desigualdades racionales, supondremos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

Desigualdades racionales

Ejemplo 4.

Resuelva
$$\frac{x+1}{x+3} \leq -1$$

Desigualdades racionales

Ejemplo 4.

Resuelva
$$\frac{x+1}{x+3} \leq -1$$

- Para utilizar las propiedades de los signos de un cociente (4) debemos tener todos los términos diferentes de cero en el mismo lado de la desigualdad (exactamente de la misma forma como lo hicimos en las desigualdades polinomiales).

Ejemplo 4

- Así, agregamos 1 en ambos lados de la desigualdad y luego combinamos términos para obtener una desigualdad racional equivalente:

$$\frac{x+1}{x+3}+1 \leq 0$$

Desigualdades racionales

Ejemplo 4

- Así, agregamos 1 en ambos lados de la desigualdad y luego combinamos términos para obtener una desigualdad racional equivalente:

$$\frac{x+1}{x+3} + 1 \leq 0$$

$$\frac{x+1}{x+3} + \overbrace{\frac{x+3}{x+3}}^{1} \leq 0 \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

Ejemplo 4

- Así, agregamos 1 en ambos lados de la desigualdad y luego combinamos términos para obtener una desigualdad racional equivalente:

$$\frac{x+1}{x+3}+1 \leq 0$$

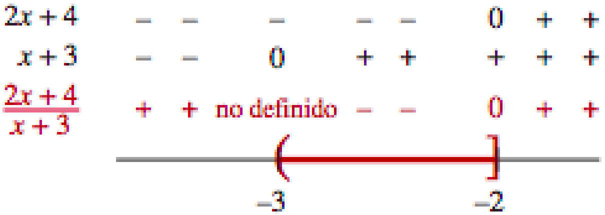
$$\frac{x+1}{x+3}+\overbrace{\frac{x+3}{x+3}}^{1} \leq 0 \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

$$\frac{2x+4}{x+3} \leq 0.$$

desigualdades racionales

Ejemplo 4

- utilizando el echo de que $2x + 4 = 0$, o cuando $x = -2$ y $x+3 = 0$, cuando $x = 3$ preparamos la tabla de signos que se muestra en la figura y el conjunto solucion es : **(-3,-2]**



Ejemplo 5

$$Resuelva\ x \leq 3 - \frac{6}{x+2}$$

- Para empezar, reescribimos la desigualdad con todas las variables y constantes diferentes de cero a la izquierda y 0 a la derecha del signo de desigualdad:

Desigualdades racionales

Ejemplo 5

$$\textit{Resuelva } x \leq 3 - \frac{6}{x+2}$$

Ejemplo 5

$$\textit{Resuelva } x \leq 3 - \frac{6}{x+2}$$

$$x - 3 + \frac{6}{x+2} \leq 0.$$

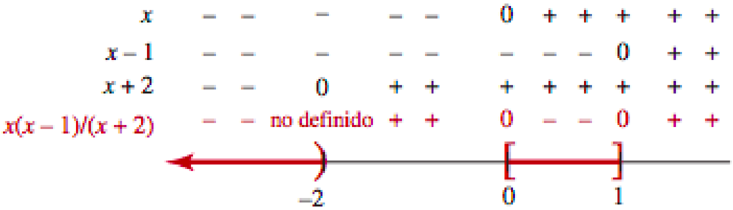
Ahora colocamos los términos sobre un común denominador,

$$\frac{(x-3)(x+2)+6}{x+2} \leq 0 \quad \text{y simplificamos a} \quad \frac{x(x-1)}{x+2} \leq 0.$$

Desigualdades racionales

Ejemplo 2.

- Determinar los tres factores sobre la recta numérica, estos tres números determinan cuatro intervalos. Usara la relación "menor o igual a 0". El conjuto solución estará dado por:



Ejemplo 2.

- Determinar los tres factores sobre la recta numérica, estos tres números determinan cuatro intervalos. Usara la relación "menor o igual a 0". El conjuto solución estará dado por:

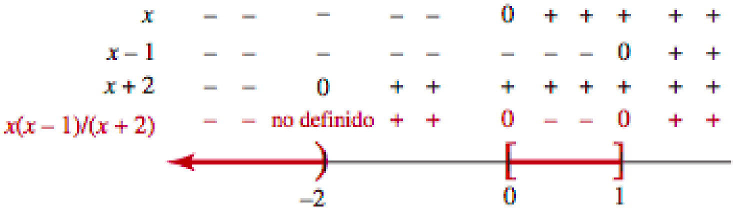
$$(-\infty, -2) \cup [0, 1]$$

Desigualdades racionales

Ejemplo 2.

- Determinar los tres factores sobre la recta numérica, estos tres números determinan cuatro intervalos. Usara la relación "menor o igual a 0". El conjuto solución estará dado por:

$$(-\infty, -2) \cup [0, 1]$$



Ejercicios racionales y polinomiales

En los problemas 1 a 40, resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en notación de intervalos.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $3x^2 - x - 2 \leq 0$
3. $x^2 - 8x + 12 < 0$
4. $6x^2 + 14x + 4 \geq 0$
5. $x^2 - 5x \geq 0$
6. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
7. $3x^2 - 27 < 0$
8. $4x^2 + 7x \leq 0$
9. $4x^2 - 4x + 1 < 0$
10. $12x^2 > 27x + 27$
11. $x^2 - 16 < 0$
12. $x^2 - 5 > 0$
13. $x^2 - 12 \leq 0$
14. $9x > 2x^2 - 18$
15. $x^2 + 6x \leq -9$
16. $9x^2 + 30x > -25$
17. $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$
18. $\dfrac{x+5}{x} \geq 0$
24. $\dfrac{3x-1}{2x-1} < -4$
25. $\dfrac{5}{x+8} < 0$
26. $\dfrac{10}{2x+5} \geq 0$
27. $\dfrac{1}{x^2+9} < 0$
28. $\dfrac{1}{x^2-1} < 0$
29. $\dfrac{x(x-1)}{x+5} \geq 0$
30. $\dfrac{(1+x)(1-x)}{x} \leq 0$
31. $\dfrac{x^2-2x+3}{x+1} \leq 1$
32. $\dfrac{x}{x^2-1} > 0$
33. $-(x+1)(x+2)(x+3) < 0$
34. $-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3) \leq 0$
35. $(x^2-1)(x^2-4) \leq 0$
36. $(x-1)^2(x+3)(x+5) > 0$
37. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x+5)^3 < 0$
38. $x^2(x-2)(x-3)^5 \geq 0$