Fracciones Parciales

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Funciones racionales

- **Función racional**
  Una función racional $y = f(x)$ es una función que tiene la forma
  $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
  donde P y Q son funciones polinomiales.

Fracciones Parciales

- **Por ejemplo, las siguientes funciones son racionales:**

$$y = \frac{x}{x^2+5}, \qquad y = \frac{\overset{\text{polinomio}}{\overset{\downarrow}{x^3 - x + 7}}}{\underset{\underset{\text{polinomio}}{\uparrow}}{x+3}}, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Funciones racionales

Gráficas

Es un poco más complicado graficar una función racional f que una función polinomial, porque además de poner atención en

- la intersección con los ejes
- la simetría y
- el desplazamiento o reflexión o estiramiento de gráficas conocidas
- también se debe vigilar el dominio de f y los grados de $P(x)$ y $Q(x)$

Fracciones Parciales

Funciones racionales

- Determinar al dominio y los grados de $P(x)$ y $Q(x)$ es importantes para:
  - determinar si la función racional tiene **asíntotas** .
  - La intersección con el eje y está en el punto $(0, f(0))$ siempre que 0 esté en el dominio de f.
  - Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1-x)/x$ no cruza el eje y, porque $f(0)$ no está definida.

Funciones racionales

Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces:

- las intersecciones con el eje x en la gráfica de la función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ son los puntos cuyas abscisas son las raíces reales del numerador $P(x)$.
- En otras palabras, la única forma en que $f(x) = P(x)/Q(x) = 0$ es hacer que $P(x) = 0$

Simétria

Recuerde que una función es simétrica cuando:

- La gráfica de una función racional f es simétrica con respecto al eje y si $f(-x) = f(x)$
- la simétrica con respecto al origen se tiene cuando $f(-x) = -f(x)$

Simétria Funciones racionales

Para determinar la simetría de la gráfica de una función racional es cuando $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes. Se considera los siguiente:

- El cociente de dos funciones pares es par.
- El cociente de dos funciones impares es par.
- El cociente de una función par y una impar es impar.

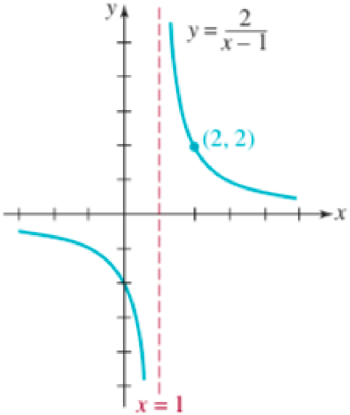
Ejemplo 1: Función reciproca desplazada

Graficar la función $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

- La gráfica no tiene simetría por que $Q(x) = x - 1$ no es una función par ni impar como $f(0) = -2$
- La intersección con el eje y esta está en $(0, 2)$
- como $p(x) = 2$ nunca es 0, no hay intersecciones con el eje x.

Ejemplo 1

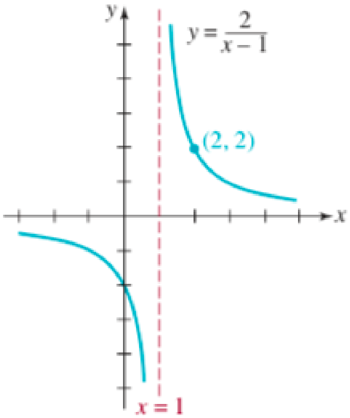
- Se tiene una función reciproca $y = 1/x$ estirada verticalmente en un factor de 2 y trasladada 1 unidad hacia la derecha
- El punto (1,1) está en la gráfica de $y = 1/x$ $y = 2/(x-1)$ es $(2,2)$



Ejemplo 1

- El numero 1 no está en el dominio de la función dada, pero podemos evaluarla en puntos cercanos a 1.
- Los valores cercanos a 1 tienen un valor absoluto grande.

x	0.999	1.001
$f(x)$	$-2\,000$	$2\,000$



Notación

Para identificar que x se aproxima a un valor a se usa la siguiente notación:

- $x \to a^-$ para decir que x tiende a a desde la izquierda, esto es, a través de números que son menores que a;
- $x \to a^+$ para decir que x tiende a a desde la derecha, esto es, a través de números que son mayores que a, y.
- $x \to a$ para decir que x tiende a desde la izquierda y también desde la derecha.

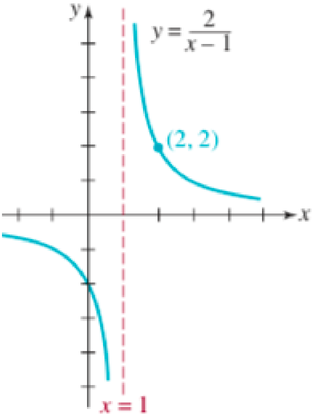
Notación

También se usan los símbolos de infinito:

- $x \to -\infty$ para indicar que x se vuelve no acotado en la dirección negativa, y
- $x \to \infty$ para indicar que x se vuelve no acotado en la dirección positiva.

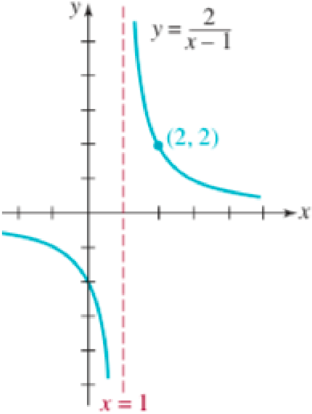
En términos de la notación recién definida tenemos que:

- $f(x) \to$



En términos de la notación recién definida tenemos que:

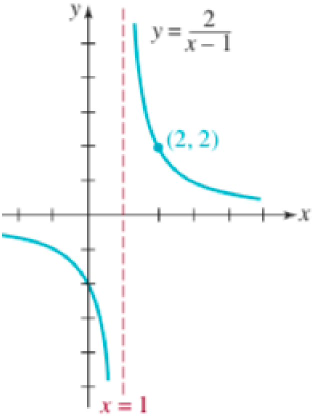
- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^{-}$



Fracciones Parciales

En términos de la notación recién definida tenemos que:

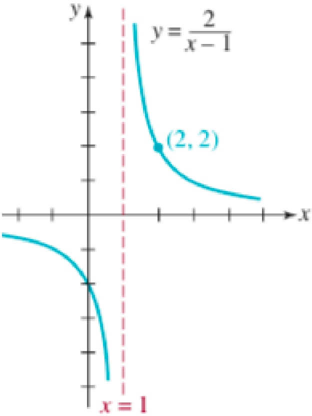
- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$
- $f(x) \to$



Fracciones Parciales

En términos de la notación recién definida tenemos que:

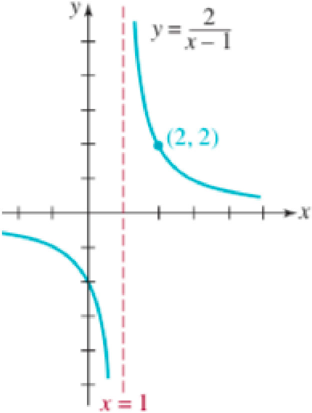
- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$
- $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^+$



Fracciones Parciales

En términos de la notación recién definida tenemos que:

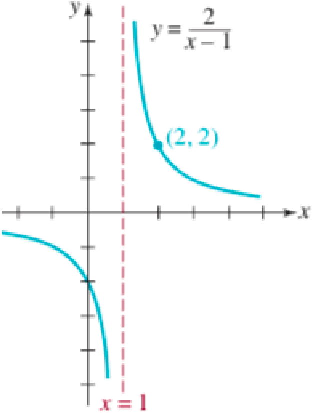
- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$
- $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^+$
- $f(x) \to$



Fracciones Parciales

En términos de la notación recién definida tenemos que:

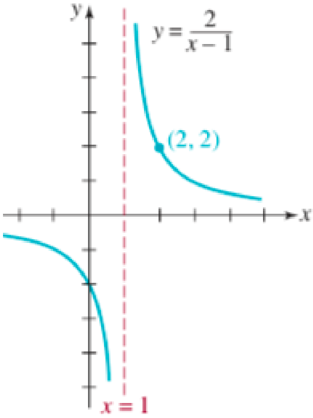
- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$
- $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^+$
- $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$



Fracciones Parciales

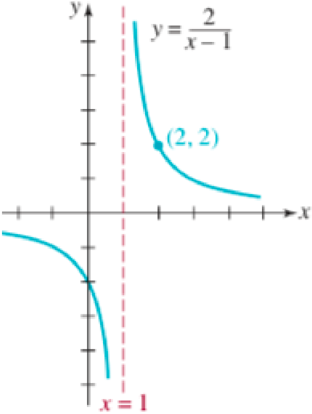
En términos de la notación recién definida tenemos que:

- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$
- $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^+$
- $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$
- $f(x) \to$

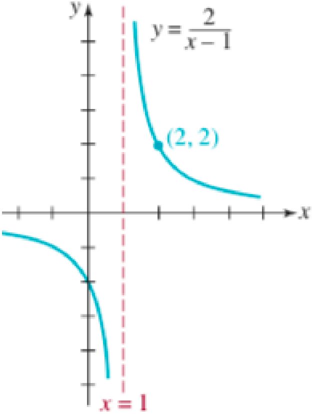


En términos de la notación recién definida tenemos que:

- $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$
- $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^+$
- $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$
- $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$



En la figura, la recta vertical $x = 1$ se denomina **asíntota vertical** de la gráfica de f, y la recta horizontal $y = 0$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de f.



Definición

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f, si se cumple que al menos una de las seis siguientes condiciones:

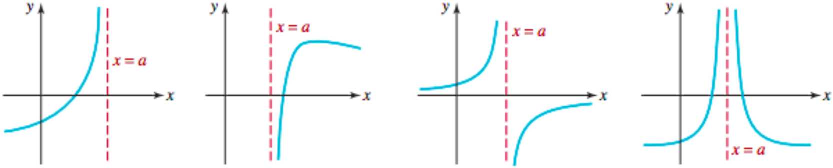
$$
\begin{array}{llll}
f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a^-, & f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^-, \\
f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a^+, & f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^+, \\
f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a, & f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a.
\end{array}
$$

Asíntotas

La siguiente figura ilustra cuatro de las posibilidades sobre el comportamiento no acotado de una función f. Cerca de una asíntota vertical $x = a$. Si la función tiene la misma clase de comportamiento no acotado desde ambos lados de $x = a$ se expresa ya sea como:

$$f(x) \to \infty \; cuando \; x \to a$$

$$f(x) \to -\infty \; cuando \; x \to a$$



a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ b) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ c) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$; $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ d) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$

Definición

Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f, si

$f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ o si $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$

Asíntotas

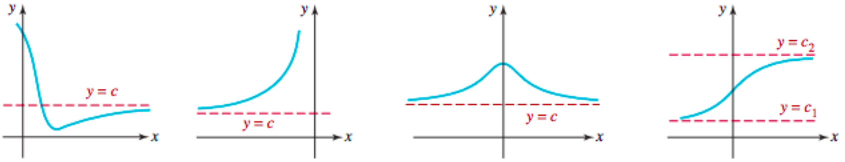
En general la gráfica de una función puede tener cuando mucho dos asíntotas horizontales. En el caso de una función racional $(f(x) = P(x)/Q(x)$ puede tener una, cuando mucho. Si la gráfica de una función racional f tiene una asíntota horizontal $y = c$, entonces:

$$f(x) \to c \ cuando \ x \to -\infty \ y \ f(x) \to c \ cuando \ x \to \infty$$

La expresión:

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \text{ y } f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty$$

es una descripción matemática del **comportamiento en los extremos** de la gráfica de una función racional.



a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ b) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ c) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ d) $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

Definición

Se dice que una recta $y = mx + b$, $m \neq 0$ es una **asíntota inclinada**, o **asíntota oblicua**, de la gráfica de la función f, si

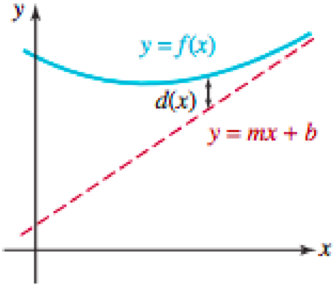
$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty$$

o bien

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty.$$

Asíntotas

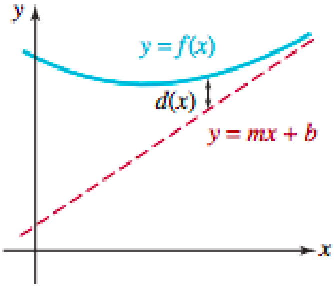
Una asíntota oblicua siempre está presente cuando valores de la función $f(x)$ se aproximan cada vez más a los valores de y en la recta $y = mx + b$, cuando el valor absoluto de x crece.



$$d(x) = f(x) - (mx + b) \rightarrow 0 \ cuando \ x \rightarrow -\infty \ o \ cuando \ x \rightarrow \infty$$

Asíntotas

De la figura podemos ver que si una gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ posee una asíntota oblicua, no puede tener una asíntota horizontal. Las asíntotas verticales y horizontales de una función racional f se pueden determinar por inspección. Entonces, para fines de esta descripción, supongamos que



$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},\ a_n \neq 0, b_m \neq 0,$$

Asíntotas

Determinación de asíntotas verticales

- Supongamos $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.
- Si a es un número real tal que $Q(a) = 0$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f
- Debido a que $Q(x)$ es un polinomio de grado m, puede tener hasta m raíces reales, y entonces la gráfica de una función racional f puede tener hasta m asíntotas verticales.

Determinación de asíntotas verticales

Si la gráfica de una función racional f tiene, por ejemplo, k asíntotas verticales ($k \leq m$), entonces las k rectas verticales dividen al plano xy en $k+1$ regiones. Por tanto, la gráfica de esta función racional tendría $k+1$ ramas.

Asíntotas verticales

Ejemplo 2: Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

Asíntotas verticales

Ejemplo 2: Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

- Por inspección de la función racional se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$ en $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto tendrá tres asíntotas:

Asíntotas verticales

Ejemplo 2: Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

- Por inspección de la función racional se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$ en $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto tendrá tres asíntotas:
    - una a la izquierda de $x = -2$,

Asíntotas verticales

Ejemplo 2: Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

- Por inspección de la función racional se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$ en $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto tendrá tres asíntotas:
  - una a la izquierda de $x = -2$,
  - entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$

Ejemplo 2: Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

- Por inspección de la función racional se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$ en $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto tendrá tres asíntotas:
  - una a la izquierda de $x = -2$,
  - entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$
  - a la derecha de la recta $x = 2$

Asíntotas verticales

Ejemplo 2: Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de la función racional $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

- Por inspección de la función racional se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$ en $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto tendrá tres asíntotas:
  - una a la izquierda de $x = -2$,
  - entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$
  - a la derecha de la recta $x = 2$

La gráfica de la función racional $f(x) = \frac{1}{x^2+x+4}$ no tiene asíntotas verticales por que $Q(x) = x^2 + x + 4 \neq 0$

Asíntotas horizontales

Determinación de las asíntotas horizontales

- Recuerde que el comportamiento en los extremos de un polinomio $P(x)$ de grado n es similar al del polinomio ax^n $(P(x) \approx ax^n)$.

las potencias menores de x son irrelevantes cuando $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{b_m x^m \boxed{+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}}$$

que $f(x)$ se comporta como $y = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ porque $f(x) \approx \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ para $x \to \pm\infty$.
Por tanto:

Asíntotas horizontales

$$\text{Si } n = m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m} x^{\overset{0}{\downarrow}\, n-n} \to \frac{a_n}{b_m} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty.$$

$$\text{Si } n < m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m} x^{\overset{\text{negativa}}{\downarrow}\, n-m} = \frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}} \to 0 \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty.$$

$$\text{Si } n > m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m} x^{\overset{\text{positiva}}{\downarrow}\, n-m} \to \infty \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty.$$

Asíntotas horizontales

De lo anterior tenemos que la asíntotas horizontales de las funciones racionales se comportan como sigue:

- Si el grado de $P(x)$ es igual al grado de $Q(x)$, entonces $y = a_n/b_n$ (el cociente de los términos de mayor orden.
- Si el grado de $P(x)$ es menor grado de $Q(x)$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal.
- Si el grado de $P(x)$ es mayor al grado de $Q(x)$, entonces la gráfica no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo 3: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Simetría** No tiene simetría dado que $P(x)$ y $Q(x) = x + 2$ no son pares ni impares.
- **Intersecciones:** $f(0) = \frac{3}{2}$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{3}{2})$.
- Al igualar $P(x) = 0$. S tiene que 3 es una raíz de P. La única intersección con el eje x está en $(3, 0)$

Funciones racionales

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Asíntotas verticales:**

Funciones racionales

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Asíntotas verticales:** Para $Q(x) = 0$ se obtiene que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Funciones racionales

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Asíntotas verticales:** Para $Q(x) = 0$ se obtiene que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.
- **Ramas**

Funciones racionales

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Asíntotas verticales:** Para $Q(x) = 0$ se obtiene que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.
- **Ramas** Como sólo hay una sola asíntota vertical, la gráfica de f consiste en dos ramas distintas, una a la izquierda de $x = -2$ y una de la derecha $x = -2$.

Funciones racionales

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Asíntotas verticales:** Para $Q(x) = 0$ se obtiene que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.
- **Ramas** Como sólo hay una sola asíntota vertical, la gráfica de f consiste en dos ramas distintas, una a la izquierda de $x = -2$ y una de la derecha $x = -2$.
- **Asíntota horizontal**

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

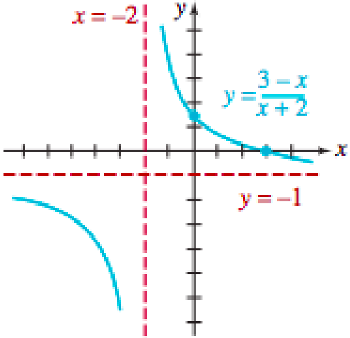
Graficar la función $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

- **Asíntotas verticales:** Para $Q(x) = 0$ se obtiene que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.
- **Ramas** Como sólo hay una sola asíntota vertical, la gráfica de f consiste en dos ramas distintas, una a la izquierda de $x = -2$ y una de la derecha $x = -2$.
- **Asíntota horizontal** El grado de P y el grado de Q son iguales $(a, 1)$, la asíntota está en a_n/a_m es decir en $-1/1 = -1$.

Funciones racionales

Ejemplo 3: gráfica de la función racional

- Tenemos una asíntota en vertical en $x = -2$
- Asíntota horizontal en $y = -1$
- Dos ramas una entre $-\infty$ y -2 y otra entre -2 y ∞
- Intersecciones en $(0, 3/2)$ y $(3, 0)$.



Funciones racionales

Ejemplo 4: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Simetría**

Funciones racionales

Ejemplo 4: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Simetría** Como $P(x)$ es impar y $Q(x)$ para $f(x)$ es impar. La gráfica tendrá simetría con respecto al orífen.

Ejemplo 4: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Simetría** Como $P(x)$ es impar y $Q(x)$ para $f(x)$ es impar. La gráfica tendrá simetría con respecto al orífen.
- **Intersecciones:**

Funciones racionales

Ejemplo 4: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Simetría** Como $P(x)$ es impar y $Q(x)$ para $f(x)$ es impar. La gráfica tendrá simetría con respecto al orífen.
- **Intersecciones:** $f(0) = 0$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 0)$.

Ejemplo 4: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Simetría** Como $P(x)$ es impar y $Q(x)$ para $f(x)$ es impar. La gráfica tendrá simetría con respecto al orífen.
- **Intersecciones:** $f(0) = 0$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 0)$.
- **Asíntotas verticales:**

Ejemplo 4: Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Simetría** Como $P(x)$ es impar y $Q(x)$ para $f(x)$ es impar. La gráfica tendrá simetría con respecto al orífen.
- **Intersecciones:** $f(0) = 0$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 0)$.
- **Asíntotas verticales:** Para $Q(x) = 0$ se obtiene que $x = -1$ y $x = 1$ serán las asíntotas verticales.

Ejemplo 4: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Funciones racionales

Ejemplo 4: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Ramas**

Funciones racionales

Ejemplo 4: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Ramas** Como sólo hay dos asíntotas verticales, la gráfica de f consiste de tres ramas distintas, una a la izquierda de $x = -1$, otra entre $-1 < x < 1$ y una más a la derecha $x = -2$.

Funciones racionales

Ejemplo 4: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Ramas** Como sólo hay dos asíntotas verticales, la gráfica de f consiste de tres ramas distintas, una a la izquierda de $x = -1$, otra entre $-1 < x < 1$ y una más a la derecha $x = -2$.
- **Asíntota horizontal**

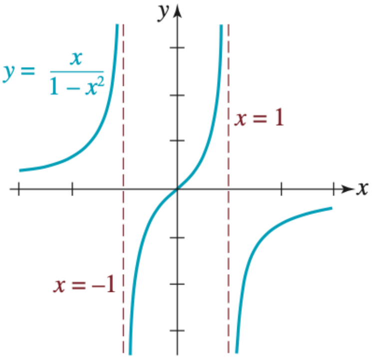
Ejemplo 4: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- **Ramas** Como sólo hay dos asíntotas verticales, la gráfica de f consiste de tres ramas distintas, una a la izquierda de $x = -1$, otra entre $-1 < x < 1$ y una más a la derecha $x = -2$.
- **Asíntota horizontal** El grado de P es menor el grado de Q, por lo tanto la asíntota horizontal es $y = 0$.

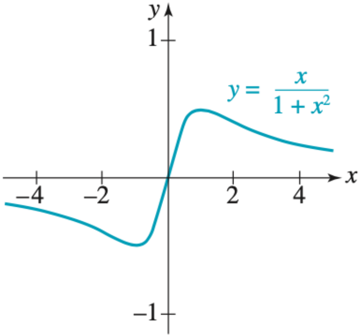
Ejemplo 4: gráfica de la función racional

- Dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$
- Asíntota horizontal en $y = 0$
- Una entre $-\infty$ y -1, otra entre -1 y 1 y una mas de 1 a ∞
- Una única intersección en $(0, 0)$.



Ejemplo 5: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

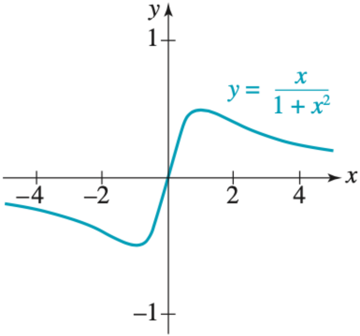


Funciones racionales

Ejemplo 5: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- Es impar y simétrica con respecto al origen.

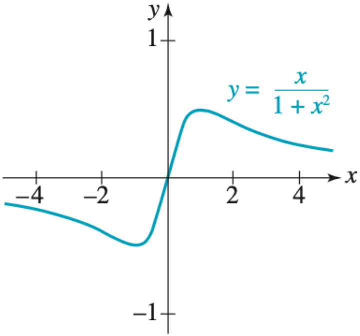


Funciones racionales

Ejemplo 5: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- Es impar y simétrica con respecto al origen.
- Como $1 + x^2 > 0$ para todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.

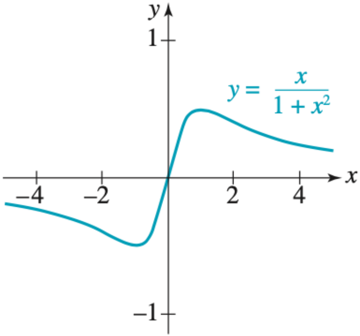


Funciones racionales

Ejemplo 5: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

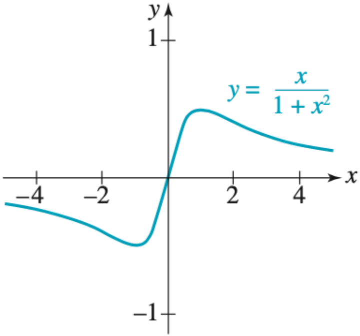
- Es impar y simétrica con respecto al origen.
- Como $1 + x^2 > 0$ para todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.
- Asíntota horizontal en $y = 0$



Ejemplo 5: gráfica de la función racional

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- Es impar y simétrica con respecto al origen.
- Como $1 + x^2 > 0$ para todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.
- Asíntota horizontal en $y = 0$
- Una única intersección en $(0, 0)$.



Funciones racionales

Determinación de asíntotas oblicuas

Suponiendo que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes. Se puede identificar una asíntota oblicua como sigue:

- Si el grado n de $P(x)$ es mayor en una unidad que el grado m de $Q(x)$ $(n = m + 1)$, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua o inclinada.
- La asíntota se determina por simple división polinomial

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cociente}}}{mx + b} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{residuo}}}{\frac{R(x)}{Q(x)}}.$$

Funciones racionales

Determinación de asíntotas oblicuas

- El grado de $R(x)$ debe ser menor que el grado del divisor $Q(x)$, entonces $R(X)/Q(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$.
- Por tanto:
  $f(x) \to mx + b$ cuando $x \to -\infty$ y
  $f(x) \to mx + b$ cuando $x \to \infty$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{mx + b}_{\text{cociente}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{residuo}}.$$

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 5}$

- No hay simetría.

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) =$

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$, ahí cruza el eje y. Tiene dos raíces

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$, ahí cruza el eje y. Tiene dos raíces una en -2 y otra en 3.

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$, ahí cruza el eje y. Tiene dos raíces una en -2 y otra en 3.
- No hay asíntota horizontal

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$, ahí cruza el eje y. Tiene dos raíces una en -2 y otra en 3.
- No hay asíntota horizontal
- Asíntota vertical

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$, ahí cruza el eje y. Tiene dos raíces una en -2 y otra en 3.
- No hay asíntota horizontal
- Asíntota vertical en $y = 5$

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

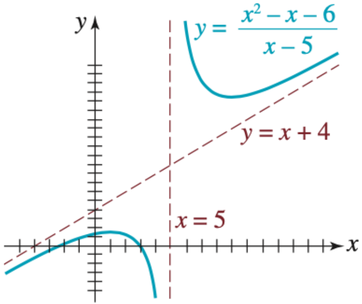
Graficar la función $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-5}$

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$, ahí cruza el eje y. Tiene dos raíces una en -2 y otra en 3.
- No hay asíntota horizontal
- Asíntota vertical en $y = 5$
- El grado de $P(x)$ es mayo que el de $Q(x)$. Determinar la asíntota oblicua.

Funciones racionales

Ejemplo 6: Asíntota oblicua

- No hay simetría.
- $f(0) = \frac{6}{5}$. Raíces en -2 y en 3.
- Asíntota vertical en $y = 5$
- Asíntota oblicua en $x + 4$



Ejemplo 7: Asíntota oblicua

Graficar la función
$f(x) = \frac{x^3-8x+12}{x^2+1}$

- No hay simetría.

Funciones racionales

Ejemplo 7: Asíntota oblicua

Graficar la función
$f(x) = \frac{x^3-8x+12}{x^2+1}$

- No hay simetría.
- $f(0) =$

Funciones racionales

Ejemplo 7: Asíntota oblicua

Graficar la función
$f(x) = \frac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1}$

- No hay simetría.
- $f(0) = 12$, ahí cruza el eje y. Tiene una raíz real en $x \approx 3{,}4$

Ejemplo 7: Asíntota oblicua

Graficar la función
$f(x) = \frac{x^3-8x+12}{x^2+1}$

- No hay simetría.
- $f(0) = 12$, ahí cruza el eje y. Tiene una raíz real en $x \approx 3{,}4$
- No hay asíntota horizontal

Funciones racionales

Ejemplo 7: Asíntota oblicua

Graficar la función
$f(x) = \frac{x^3-8x+12}{x^2+1}$

- No hay simetría.
- $f(0) = 12$, ahí cruza el eje y. Tiene una raíz real en $x \approx 3{,}4$
- No hay asíntota horizontal
- Asíntota vertical en $y = x$

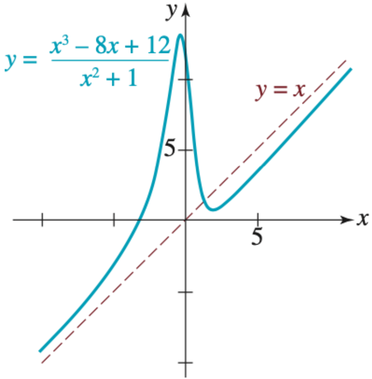
Ejemplo 7: Asíntota oblicua

Graficar la función
$f(x) = \frac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1}$

- No hay simetría.
- $f(0) = 12$, ahí cruza el eje y. Tiene una raíz real en $x \approx 3{,}4$
- No hay asíntota horizontal
- Asíntota vertical en $y = x$
- El grado de $P(x)$ es mayo que el de $Q(x)$. Determinar la asíntota oblicua.

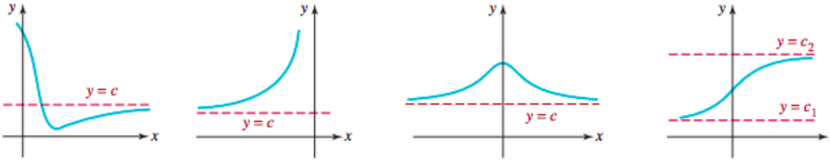
Ejemplo 7: Asíntota oblicua

- No hay simetría.
- $f(0) = 12$, ahí cruza el eje y. Tiene una raíz real en $x \approx 3{,}4$
- No hay asíntota horizontal
- Asíntota vertical en $y = x$
- El grado de $P(x)$ es mayo que el de $Q(x)$. Determinar la asíntota oblicua.



Una nota acerca de las asíntotas

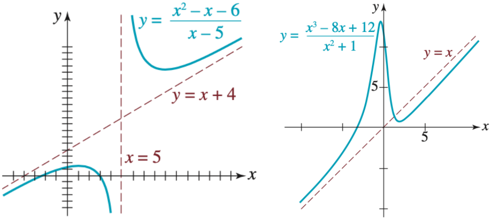
- Las asíntotas verticales son valores para los cuales el valor de $f(x)$ está indeterminado ($f(x)$ no las "cruza").
- Las asíntotas horizontales y oblicuas pueden ser cortadas por $f(x)$.



a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ b) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ c) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ d) $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

Una nota acerca de las asíntotas

- Las asíntotas verticales son valores para los cuales el valor de $f(x)$ está indeterminado ($f(x)$ no las çruza").
- Las asíntotas horizontales y oblicuas pueden ser cortadas por $f(x)$.



Introducción

Cuando dos funciones racionales, digamos, $f(x) = \frac{2}{x+5}$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$ se suman, los términos se combina por medio del común denominador.

$$\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+5}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\left(\frac{x+5}{x+5}\right).$$

Al sumar lo numeradores del lado derecho obtenemos la siguiente expresión racional.

$$\frac{2x+7}{(x+5)(x+1)}.$$

Un procedimiento importante en el estudio de cálculo integral requiere que podamos invertir el proceso anterior. A partir de una expresión racional la dividimos en facciones más simples que denominamos **fracciones parciales**

- $\frac{2}{x+5}$
- $\frac{1}{x+1}$

Terminología

El proceso algebraico para descomponer una expresión racional en fracciones parciales se denomina descomposición en fracciones parciales. Por conveniencia, supondremos que la función racional $P(x)/Q(x)$

- $Q(x) > 0$, es una fracción propia o expresión racional propia; es decir, el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$
- los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

Fracciones parciales

Terminología

Para descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ analizaremos 4 casos. Los casos dependen de los factores en el denominador Q(x).

Cuando el polinomio Q(x) se factoriza como producto de $(ax+b)^n$ y $(ax^2+bx+c)^m$, con $n = 1, 2, \ldots$ y $m = 1, 2, \ldots$, donde los coeficientes a, b, c son números reales y el polinomio cuadrático $(ax^2+bx+c)^m$ es **irreducible** en los números reales, la expresión racional $P(x)/Q(x)$ se puede descomponer en una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{C_k}{(ax+b)^k} \qquad \text{y} \qquad \frac{A_k x + B_k}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Fracciones parciales

Caso1: $Q(x)$ contiene factores lineales no repetidos

Planteamos lo siguiente con base en el álgebra. Si el denominador puede factorizarse por completo en factores lineales,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\dots(a_nx + b_n)$$

donde todos los $(a_ix_i + b_i)$, entonces la expresión racional se puede factorizar como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

donde $C_1, C_2, \dots C_n$ son constantes reales.

Ejemplo: Factores distintos

Descomponer $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$

- Podemos reescribir como:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

Fracciones parciales

Ejemplo 1: Factores distintos

Descomponer $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$

- Podemos reescribir como:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

Fracciones parciales

Ejemplo 1: Factores distintos

Descomponer $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$

- Podemos reescribir como:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

- $2x + 1 = A(x+3) + B(x-1)$

Ejemplo 1: Factores distintos

Descomponer $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$

- Podemos reescribir como:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

- $2x + 1 = A(x+3) + B(x-1)$
- $2x + 1 = (A+B)x + (3A-B)$

igual

$$2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0.$$

igual

Ejemplo 1: Factores distintos

Descomponer $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$

- Podemos reescribir como:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

- $2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1)$
- $2x + 1 = (A + B)x + (3A - B)$

$$\overbrace{2x + 1x^0 = (A + B)x}^{\text{igual}} + (3A - B)x^0.$$

igual

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = 3A - B. \end{cases}$$

Ejemplo 1: Factores distintos

Descomponer $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$

- Podemos reescribir como:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

- $2x + 1 = A(x+3) + B(x-1)$
- $2x + 1 = (A+B)x + (3A - B)$

$$\overset{\text{igual}}{2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0.}$$

igual

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = 3A - B. \end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3}.$$

Fracciones parciales

Ejemplo 2: Factores distintos

Descomponer $\frac{4x^2-x+1}{(x-1)(x+3)(x-6)}$

Caso 2: $Q(x)$ contiene factores lineales repetidos

Si el denominador $Q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax+b)$ con $n>1$, se pueden encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contenga los términos como:

$$\frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

Fracciones parciales

Ejemplo 1: Factores lineales repetidos

Descomponer $\frac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

- Podemos escribirlo como:

Ejemplo 1: Factores lineales repetidos

Descomponer $\frac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

- Podemos escribirlo como:

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \overbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}}^{\text{de acuerdo con el caso 2}} + \overbrace{\frac{D}{2x-1}}^{\text{de acuerdo con el caso 1}}.$$

Ejemplo 1: Factores lineales repetidos

Descomponer $\frac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

Fracciones parciales

Ejemplo 1: Factores lineales repetidos

Descomponer $\frac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

$$6x - 1 = Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3$$

$$6x - 1 = (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C.$$

Fracciones parciales

Ejemplo 1: Factores lineales repetidos

Descomponer $\frac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

$$6x - 1 = Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3$$

$$6x - 1 = (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C.$$

$$0 = 2A + D, \qquad 0 = -A + 2B.$$

Ejemplo 1: Factores lineales repetidos

Descomponer $\frac{6x-1}{x^3(2x-1)}$

$$6x - 1 = Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3$$

$$6x - 1 = (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C.$$

$$0 = 2A + D, \qquad 0 = -A + 2B.$$

$$\frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} = -\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x - 1}.$$

Fracciones parciales

Caso 3: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Si el denominador $Q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos $a_i x^2 + b_i x + c_i$, se pueden encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots A_n$, $B_1, B_2, \ldots B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contenga los términos como:

$$\frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{a_n x^2 + b_n x + c_n}.$$

Fracciones parciales

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

- Como los factores en el denominador son irreducibles:

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

- Como los factores en el denominador son irreducibles:

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Fracciones parciales

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

$$
\begin{aligned}
4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\
&= (A + B)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + B)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = 2A + B + D \\ 4 = 3A + 2B + C \\ 0 = 3B + D. \end{cases}$$

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + B)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = 2A + B + D \\ 4 = 3A + 2B + C \\ 0 = 3B + D. \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = A - B \\ 2 = A + B. \end{cases}$$

Ejemplo 3: Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Descomponer $\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + B)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = 2A + B + D \\ 4 = 3A + 2B + C \\ 0 = 3B + D. \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = A - B \\ 2 = A + B. \end{cases}$$

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3}.$$

Fracciones parciales

Caso 4: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles repetidos

Si el denominador $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible repetido $(a_i x^2 + b_i x + c_i)^n$, se pueden encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots A_n$, $B_1, B_2, \ldots B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contenga los términos como:

$$\frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

- Como los factores en el denominador contiene un solo factor irreducible repetido:

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

- Como los factores en el denominador contiene un solo factor irreducible repetido:

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

$$0x^3 + 1x^2 + 0x + 0x^0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)x^0$$

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

$$0x^3 + 1x^2 + 0x + 0x^0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)x^0$$

$$\begin{cases} 0 = A \\ 1 = B \\ 0 = 4A + C \\ 0 = 4B + D. \end{cases}$$

Fracciones parciales

Ejemplo 4: Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Descomponer $\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

$$0x^3 + 1x^2 + 0x + 0x^0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)x^0$$

$$\begin{cases} 0 = A \\ 1 = B \\ 0 = 4A + C \\ 0 = 4B + D. \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}.$$

Fracciones parciales

Ejemplo 5: Casos múltiples

Descomponer $\frac{x+3}{(x-5)(x+2)^2(x^2+1)^2}$

Fracciones parciales

Ejemplo 5: Casos múltiples

Descomponer $\frac{x+3}{(x-5)(x+2)^2(x^2+1)^2}$

$$\overbrace{\frac{A}{x-5}}^{\text{Caso 1}}+\overbrace{\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}}^{\text{Caso 2}}+\overbrace{\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}}^{\text{Caso 4}}.$$

Notas finales

- Cuando el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$, entonces $P(x)/Q(x)$ es una **fracción impropia**.
- En ese caso, primero utilizamos una división larga para obtener polinomio como un cociente mas una **fracción propia**.

Ejemplo 5: Factor impropio

Descomponer $\frac{x^3+x-1}{x^2-3x}$

fracción impropia ↓ fracción propia ↓

$$\frac{x^3+x-1}{x^2-3x} = x+3+\frac{10x-1}{x(x-3)}.$$

Verificar que

$$x+3+\frac{10x-1}{x(x-3)} = x+3+\frac{\frac{1}{3}}{x}+\frac{\frac{29}{3}}{x-3}$$