Representación de Números Complejos

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Marzo 17, 2022

Representación geométrica

Representación geométrica

- Los reales se representan geométricamente mediante el uso de la recta numérica
- Los complejos los representamos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas

Representación geométrica

Representación geométrica

- Los reales se representan geométricamente mediante el uso de la recta numérica
- Los complejos los representamos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas
    - Un par de ejes que se cortan perpendicularmente, horizontal X y vertical Y.

Representación geométrica

Representación geométrica

- Los reales se representan geométricamente mediante el uso de la recta numérica
- Los complejos los representamos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas
  - Un par de ejes que se cortan perpendicularmente, horizontal X y vertical Y.
  - El cruce de X y Y se denomina origen.

Representación geométrica

Representación geométrica

- Los reales se representan geométricamente mediante el uso de la recta numérica
- Los complejos los representamos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas
  - Un par de ejes que se cortan perpendicularmente, horizontal X y vertical Y.
  - El cruce de X y Y se denomina origen.
  - Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera

Representación geométrica

Representación geométrica

- Los reales se representan geométricamente mediante el uso de la recta numérica
- Los complejos los representamos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas
  - Un par de ejes que se cortan perpendicularmente, horizontal X y vertical Y.
  - El cruce de X y Y se denomina origen.
  - Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera
    - x, llamada la abcisa es la distancia desde P hasta eje Y

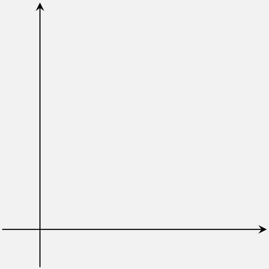
Representación geométrica

Representación geométrica

- Los reales se representan geométricamente mediante el uso de la recta numérica
- Los complejos los representamos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas
  - Un par de ejes que se cortan perpendicularmente, horizontal X y vertical Y.
  - El cruce de X y Y se denomina origen.
  - Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera
    - x, llamada la abcisa es la distancia desde P hasta eje Y
    - y, llamada la ordenada es la distancia desde P hasta eje X

Representación geométrica

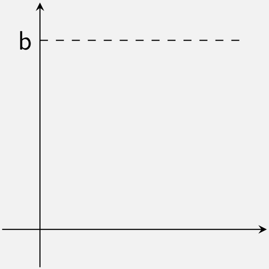
Diagrama de Argand



- Para identificar los números complejos en el plano. A cado número complejo $z = a + bi$

Representación geométrica

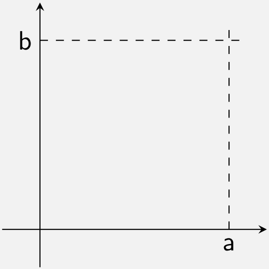
Diagrama de Argand



- Para identificar los números complejos en el plano. A cado número complejo $z = a + bi$
  - b se indica sobre el eje Y (imaginario)

Representación geométrica

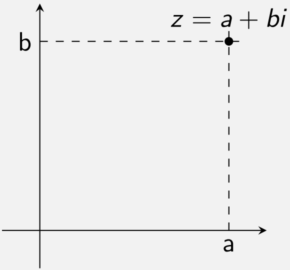
Diagrama de Argand



- Para identificar los números complejos en el plano. A cado número complejo $z = a + bi$
    - b se indica sobre el eje Y (imaginario)
    - a se marca sobre el eje X (real)

Representación geométrica

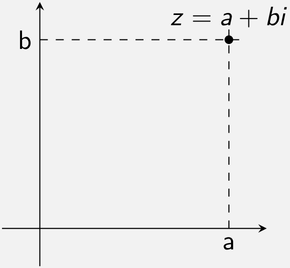
Diagrama de Argand



- Para identificar los números complejos en el plano. A cado número complejo $z = a + bi$
  - b se indica sobre el eje Y (imaginario)
  - a se marca sobre el eje X (real)
  - la intersección es el complejo z

Representación geométrica

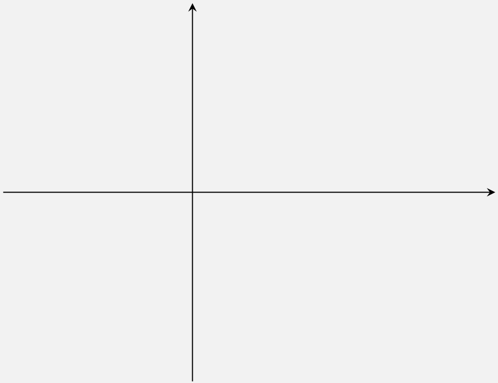
Plano Complejo



- El conjunto de todos estos puntos, es conocido como Plano Complejo.

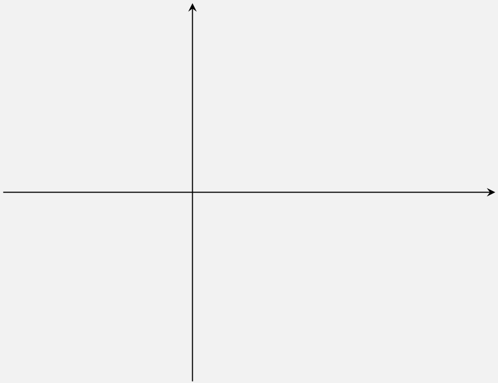
Representación geométrica

Ejemplos



Representación geométrica

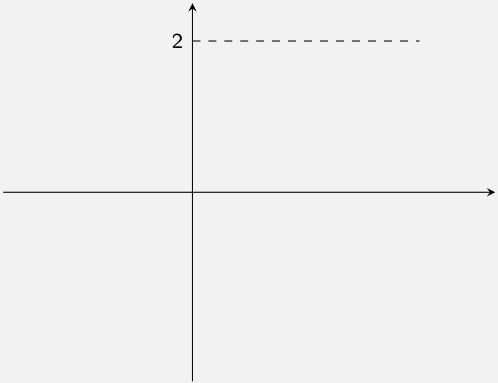
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$

Representación geométrica

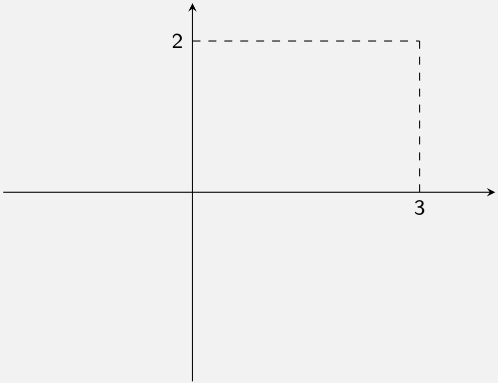
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$

Representación geométrica

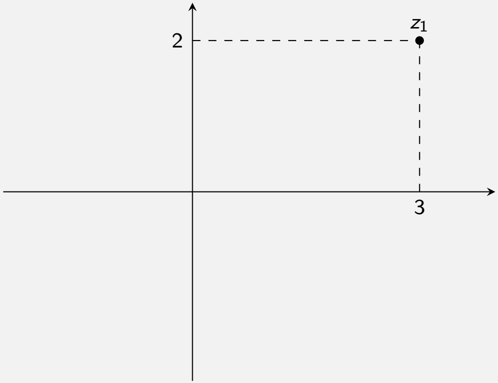
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$

Representación geométrica

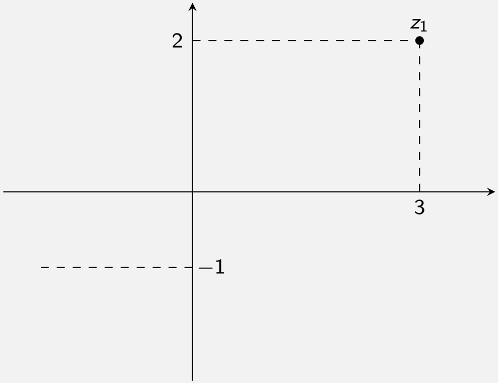
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -2 - i$

Representación geométrica

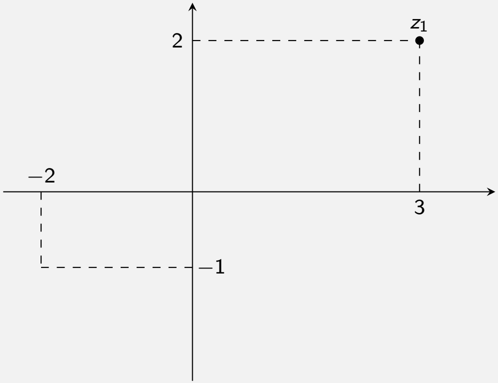
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -2 - i$

Representación geométrica

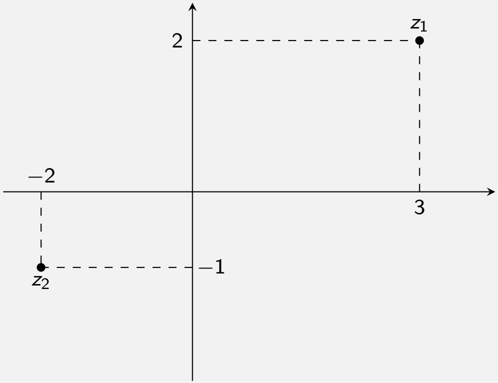
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -2 - i$

Representación geométrica

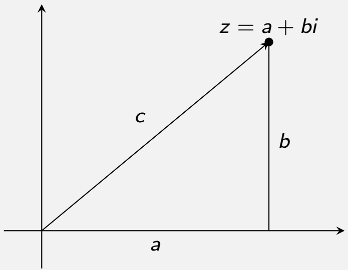
Ejemplos



- $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -2 - i$

Representación geométrica

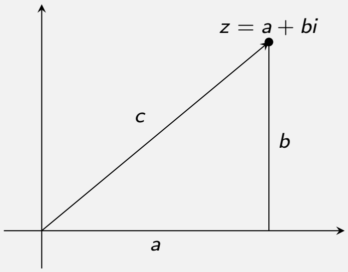
Interpretación geométrica de módulo



- Sea $z = a + bi$ un número complejo. El módulo es la distancia del origen con z en el plano complejo (segmento c).

Representación geométrica

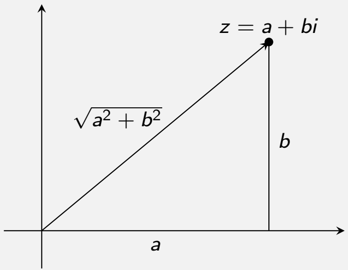
Interpretación geométrica de módulo



- Podemos calcular el valor del segmento c utilizando el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y por lo tanto igual a $|z|$.

Representación geométrica

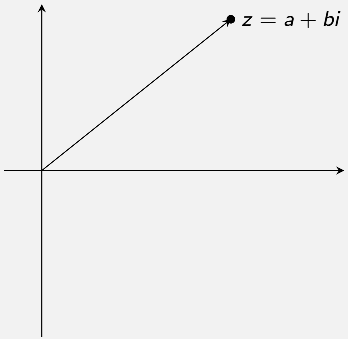
Interpretación geométrica de módulo



- Podemos calcular el valor del segmento c utilizando el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y por lo tanto igual a $|z|$.

Representación geométrica

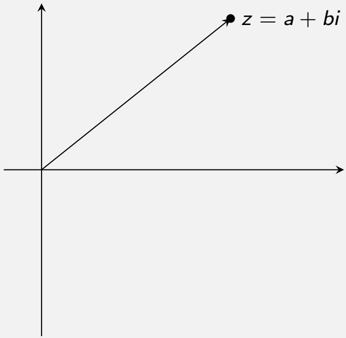
Interpretación geométrica de módulo



- El su conjugado de $z = a + bi$ está dado por $\bar{z} = abi$.

Representación geométrica

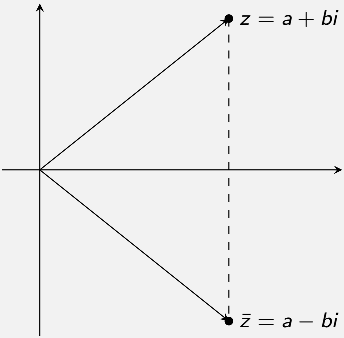
Interpretación geométrica de módulo



- El su conjugado de $z = a + bi$ está dado por $\bar{z} = abi$. El conjugado en forma geométrica se obtiene reflejando el punto con respecto al eje real.

Representación geométrica

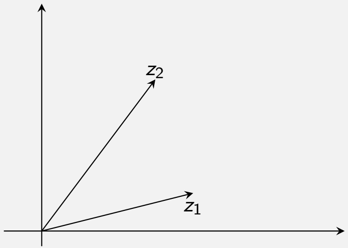
Interpretación geométrica de módulo



- El su conjugado de $z = a + bi$ está dado por $\bar{z} = abi$.

Representación geométrica

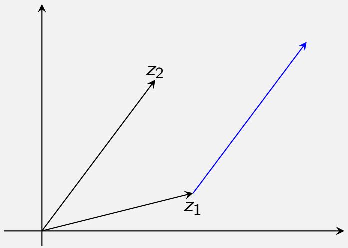
Suma geométrica de complejos



La forma de sumar números complejos geométricamente es la Regla del paralelogramo. Dados dos complejos z_1 y z_2, $z_1 + z_2$ se encuentra de la siguiente forma:

Representación geométrica

Suma geométrica de complejos

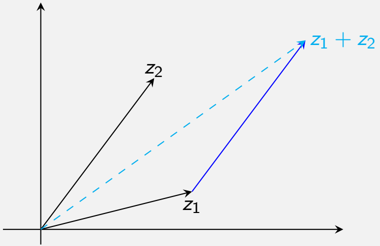


La forma de sumar números complejos geométricamente es la Regla del paralelogramo. Dados dos complejos z_1 y z_2, $z_1 + z_2$ se encuentra de la siguiente forma:

- A partir del punto z_1 se traslada el segmento que une a z_2 con el origen

Representación geométrica

Suma geométrica de complejos

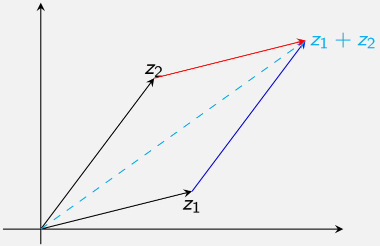


La forma de sumar números complejos geométricamente es la Regla del paralelogramo. Dados dos complejos z_1 y z_2, z_1+z_2 se encuentra de la siguiente forma:

- A partir del punto z_1 se traslada el segmento que une a z_2 con el origen
- Al final del se tendrá $z_1 + z_2$

Representación geométrica

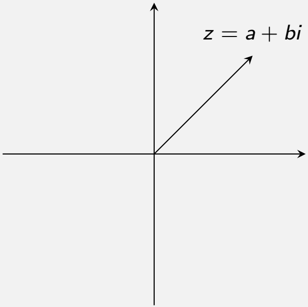
Suma geométrica de complejos



- También podría trasladarse z_1 al final de z_2

Representación geométrica

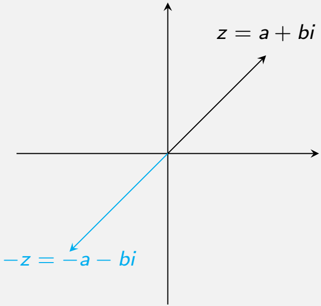
Opuesto geométrico de complejos



- El opuesto o negativo de un complejo $z = a + bi$ geométricamente se obtiene como sigue:

Representación geométrica

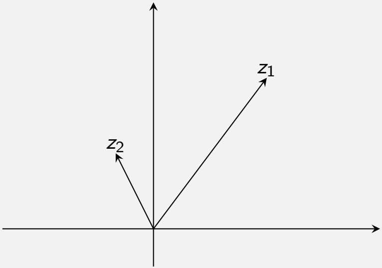
Opuesto geométrico de complejos



- El opuesto o negativo de un complejo $z = a + bi$ geométricamente se obtiene como sigue:
  - $-z = -a - bi$, el segmento estará en dirección opuesta a la de z

Representación geométrica

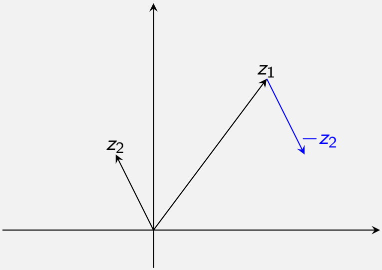
Resta geométrica de complejos



- Para restar dos complejos z_1 y z_2 geométricamente se ubica z_1 en el plano

Representación geométrica

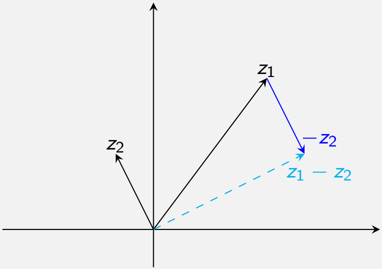
Resta geométrica de complejos



- Para restar dos complejos z_1 y z_2 geométricamente se ubica z_1 en el plano
- a continuación se se agrega el opuesto de z_2 en el punto z_1.

Representación geométrica

Resta geométrica de complejos



- Para restar dos complejos z_1 y z_2 geométricamente se ubica z_1 en el plano
- a continuación se se agrega el opuesto de z_2 en el punto z_1.
- El complejo resultante $z_1 - z_2$ se ubica en el extremo final

Forma Polar

La Forma Polar

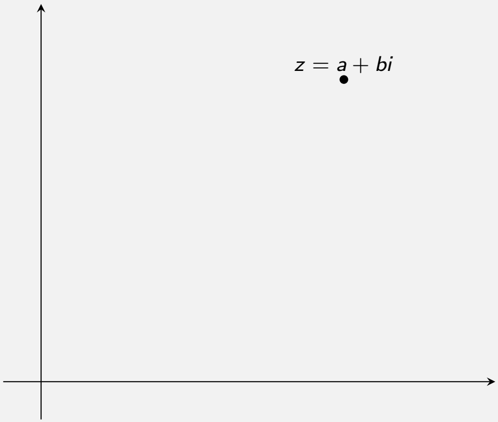
- Es complicado dar una interpretación geométrica al producto de números complejos

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

- Introduciremos otro sistema de coordenadas la forma polar. Donde a cada número $z=a+bi$ los asociamos con el vector asociado con $|z|$ y el ángulo θ que forma con el eje X

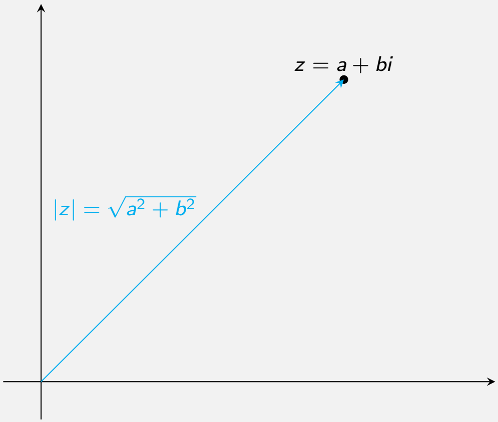
Forma Polar

Trigonométrica



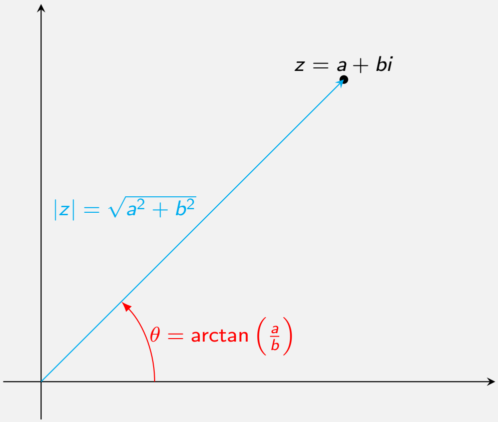
Forma Polar

Trigonométrica



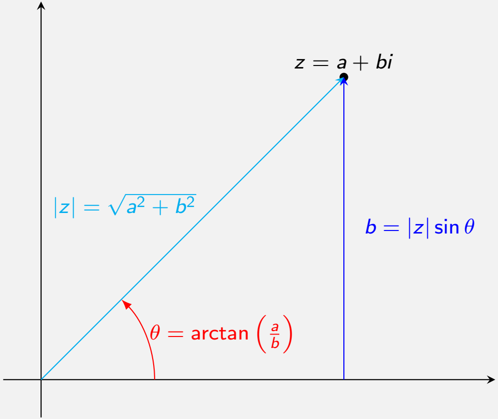
Forma Polar

Trigonométrica



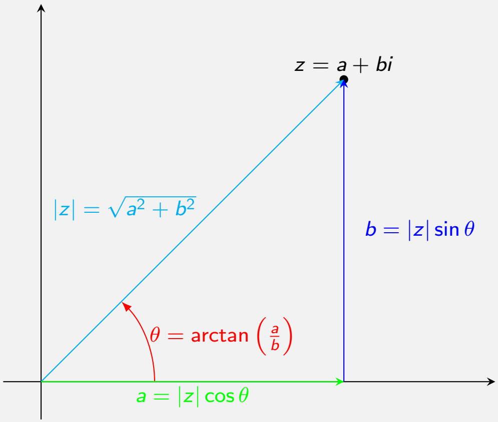
Forma Polar

Trigonométrica



Forma Polar

Trigonométrica



Forma Polar

Fórmulas de cambio de coordenadas forma polar

- $a = |z|\cos\theta,\ b = |z|\sin\theta$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$
- θ es denominado como el argumento o amplitud del complejo z
- El argumento θ, tal que $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se llama amplitud o argumento principal de z.
- Si conocemos el argumento principal y el módulo, entonces se puede representar z geométricamente sin ambigüedad.

Forma Polar

Repersentación en forma polar

- Un complejo se representa en forma polar como:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- Si se conoce $z = a + bi$ podemos obtener la forma polar utilizando:
  - $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
  - $\theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
2. Calculamos el argumento

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
2. Calculamos el argumento
   $\theta = \arctan \frac{2}{2} = \arctan 1 = 45^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

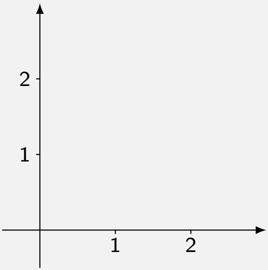
1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
2. Calculamos el argumento
   $\theta = \arctan \frac{2}{2} = \arctan 1 = 45^o$
3. La forma polar estará data por:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos 45^o + i \sin 45^o\right)$$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante (cont.)

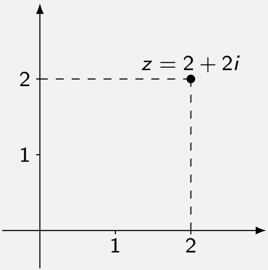
Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano ($|z| = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante (cont.)

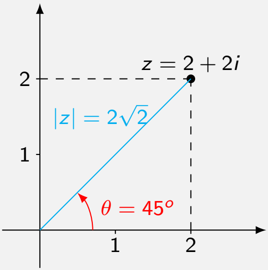
Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano ($|z| = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el primer cuadrante (cont.)

Determinar la forma polar del número complejo $z = 2 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano ($|z| = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento,

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{4}{-3} = -53{,}13^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{4}{-3} = -53{,}13^o$
3. como la calculadora solo da ángulos entre $-90 \leq \theta \leq 90$ para obtener el argumento debemos: $\theta = 180^o + \theta' = 126{,}87^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

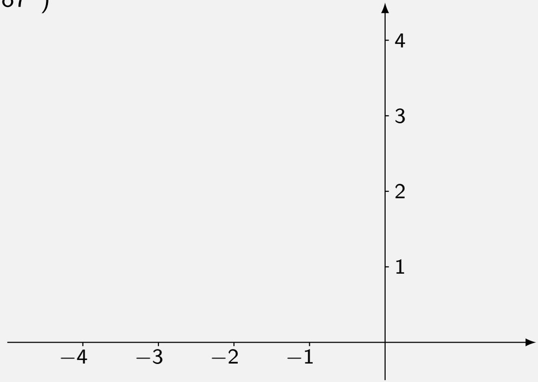
1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{4}{-3} = -53{,}13^o$
3. como la calculadora solo da ángulos entre $-90 \leq \theta \leq 90$ para obtener el argumento debemos: $\theta = 180^o + \theta' = 126{,}87^o$
4. La forma polar estará data por:

$$z = 5(\cos 126{,}87^o + i \sin 126{,}87^o)$$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante (cont.)

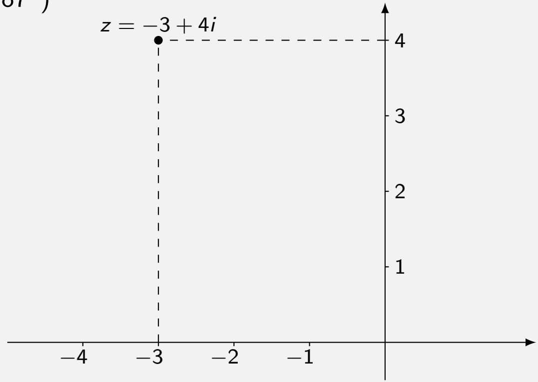
Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano ($|z| = 5$ y $\theta = 126{,}87^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante (cont.)

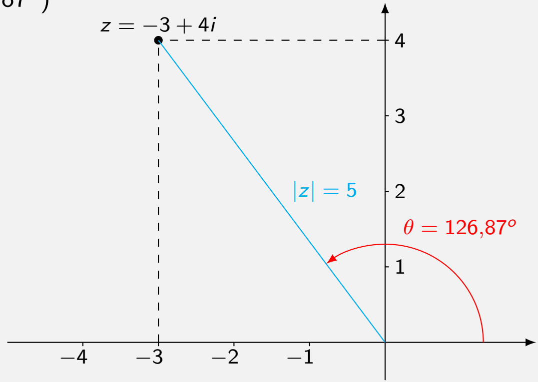
Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano ($|z| = 5$ y $\theta = 126{,}87^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el segundo cuadrante (cont.)

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 + 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano ($|z| = 5$ y $\theta = 126{,}87^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento,

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{-4}{-3} = 53{,}13^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{-4}{-3} = 53{,}13^o$
3. obtener el argumento principal:

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{-4}{-3} = 53{,}13^o$
3. obtener el argumento principal: $\theta = 180^o + \theta' = 233{,}13^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el tercer cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = -3 - 4i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

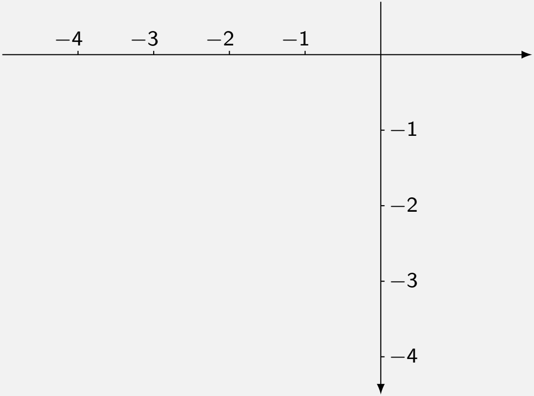
1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan \frac{-4}{-3} = 53{,}13^o$
3. obtener el argumento principal: $\theta = 180^o + \theta' = 233{,}13^o$
4. La forma polar estará data por:

$$z = 5(\cos 233{,}13^o + i \sin 233{,}13^o)$$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el terce cuadrante (cont.)

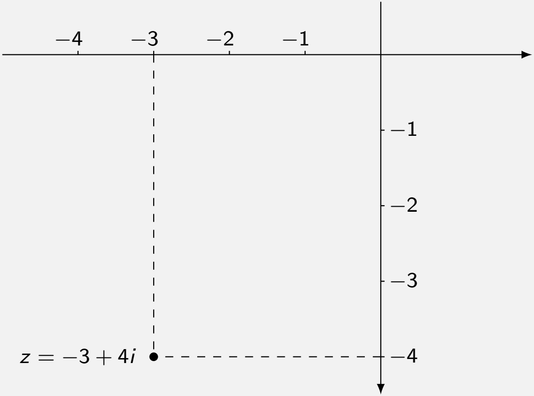
Para el complejo $z = -3 - 4i$ ($|z| = 5$ y $\theta = 233{,}13^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el terce cuadrante (cont.)

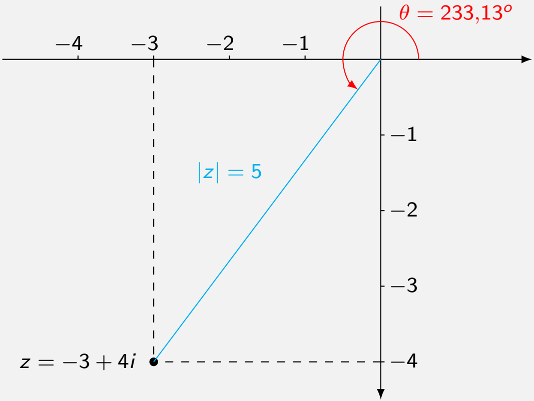
Para el complejo $z = -3 - 4i$ ($|z| = 5$ y $\theta = 233{,}13^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el terce cuadrante (cont.)

Para el complejo $z = -3 - 4i$ ($|z| = 5$ y $\theta = 233{,}13^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
2. Calculamos el argumento,

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan -\frac{2}{1} = -63{,}43^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan -\frac{2}{1} = -63{,}43^o$
3. obtener el argumento principal:

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan -\frac{2}{1} = -63{,}43^o$
3. obtener el argumento principal: $\theta = 360^o + \theta' = 296{,}55^o$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante

Determinar la forma polar del número complejo $z = 1 - 2i$ y proporcionar su representación geométrica en el plano.

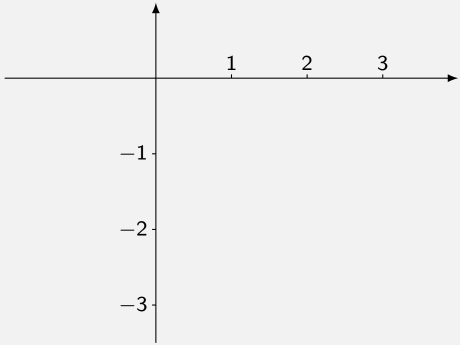
1. Calculamos el módulo
   $z = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
2. Calculamos el argumento, $\theta' = \arctan -\frac{2}{1} = -63{,}43^o$
3. obtener el argumento principal: $\theta = 360^o + \theta' = 296{,}55^o$
4. La forma polar estará data por:

$$z = 5(\cos 296{,}55^o + i \sin 296{,}55^o)$$

Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante (cont.)

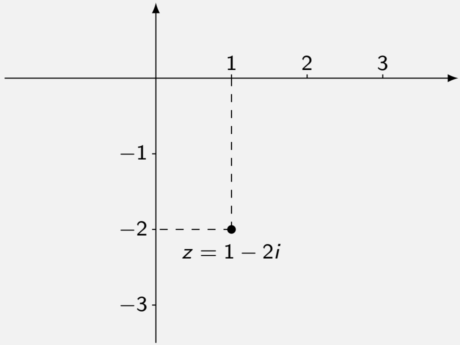
Para el complejo $z = 1 - 2i$ ($|z| = \sqrt{5}$ y $\theta = 296{,}55^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante (cont.)

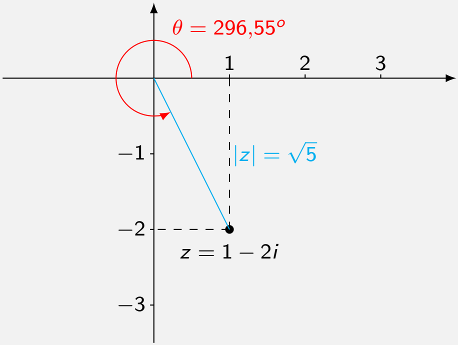
Para el complejo $z = 1 - 2i$ ($|z| = \sqrt{5}$ y $\theta = 296{,}55^o$)



Forma Polar

Ejemplo: complejo en el cuarto cuadrante (cont.)

Para el complejo $z = 1 - 2i$ ($|z| = \sqrt{5}$ y $\theta = 296{,}55^o$)



Ejercicios:

Encontrar la representación polar y graficar los siguientes números complejos:

- $z = 2(\cos 60^o + i \sin 60^o)$
- $z = \frac{1}{5}(\cos 45^o + i \sin 45^o)$
- $z = 16(\cos 120^o + i \sin 120^o)$
- $z = 7(\cos 100^o + i \sin 100^o)$
- $z = 4(\cos 400^o + i \sin 400^o)$
- $z = 6(\cos 312^o + i \sin 312^o)$
- $z = (1 + \sqrt{2})(\cos -60^o + i \sin -60^o)$

Ejercicios:

Determinar la forma polar de los siguientes números complejos:

- $z = 3 + 4i$
- $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $z = 1 - i$
- $z = \sqrt{3} + i$
- $z = (6 + i)(2 - i)$
- $z = -7 - 7i$
- $z = 5$

Producto en forma polar

Multiplicación

Dados dos complejos en forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. La multiplicación se realiza como:

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= |z| \cdot |w|\big((\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi) + (\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi)i\big) \\
&= |z| \cdot |w|\big(\cos(\theta + \psi) + i\sin(\theta + \psi)\big)
\end{aligned}
$$

Producto en forma polar

Multiplicación

Dados dos complejos en forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. La multiplicación se realiza como:

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= |z| \cdot |w| \big((\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi) + (\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi) i \big) \\
&= |z| \cdot |w| \big(\cos(\theta+\psi) + i\sin(\theta+\psi) \big)
\end{aligned}
$$

Entidades trigonométricas de la suma de ángulos:

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \cos a\sin b + \cos b\sin a$

División en forma polar

División

Dados dos complejos en forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ se dividen utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{|z|}{|w|}\Big(\cos(\theta - \psi) + i\sin(\theta - \psi)\Big)$$

- Puede probarse la expresión de forma similar a la multiplicacion

La Forma Polar

División y producto

En forma polar es posible uan interpretación geométrica del producto y la división.

- El resultado del producto es un complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos y su amplitud es la suma de las amplitudes.
- El resultado de la división es un complejo cuyo módulo es igual a la división de los módulos y su amplitud es la diferencia de las amplitudes.

Operaciones en Forma Polar

Ejemplo: División y producto

Dados $z_1 = 2(\cos 95^o + i \sin 95^o)$ y $z_2 = 3(\cos 25^o + i \sin 25^o)$ calcular $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$

Operaciones en Forma Polar

Ejemplo: División y producto

Dados $z_1 = 2(\cos 95^o + i \sin 95^o)$ y $z_2 = 3(\cos 25^o + i \sin 25^o)$ calcular $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2 \cdot 3\big(\cos(95^o + 25^o) + i \sin(95^o + 25^o)\big) \\ &= 6(\cos 120^o + i \sin 120^o) \end{aligned}$$

Operaciones en Forma Polar

Ejemplo: División y producto

Dados $z_1 = 2(\cos 95^o + i \sin 95^o)$ y $z_2 = 3(\cos 25^o + i \sin 25^o)$ calcular $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2 \cdot 3\big(\cos(95^o + 25^o) + i \sin(95^o + 25^o)\big) \\ &= 6(\cos 120^o + i \sin 120^o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2}{3}\big(\cos(95^o - 25^o) + i \sin(95^o - 25^o)\big) \\ &= \frac{2}{3}(\cos 70^o + i \sin 70^o) \end{aligned}$$

Operaciones en forma polar

Realice las siguientes operaciones utilizando la forma polar

1. $(1+i)(\sqrt{3}+i)$
2. $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
3. $\frac{4i}{2+i}$
4. $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
5. $\frac{(\sqrt{2}+i)(1-i)}{5i}$

Potencias de números complejos

Fórmula de Moivre

La expresión $|z| \cdot |w| \big(\cos(\theta + \psi) + i \sin(\theta + \psi) \big)$ puede ser utilizada para hallar la potencia enésima de un número complejo. Supongamos que $z = |z| \big(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \big)$ y n es un entero positivo, entonces tenemos que:

$$z^n = |z|^n \big(\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta) \big)$$

la última expresión es la fórmula de Moivre y nos permite calcular de forma eficiente las potencia de un número complejo.

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 2(\cos 30^o + i \sin 30^o)$, calcule z^5

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 2(\cos 30^o + i \sin 30^o)$, calcule z^5

Solución:

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 2(\cos 30^o + i \sin 30^o)$, calcule z^5

Solución:

1. $z^5 = 2^5(\cos 5 \cdot 30^o + i \sin 5 \cdot 30^o)$

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 2(\cos 30^o + i \sin 30^o)$, calcule z^5

Solución:

1. $z^5 = 2^5(\cos 5 \cdot 30^o + i \sin 5 \cdot 30^o)$
2. $z^5 = 32(\cos 150^o + i \sin 150^o)$

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ calculamos el módulo

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ calculamos el módulo
2. $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 53{,}13^o$ calculamos el argumento

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ calculamos el módulo
2. $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 53{,}13^o$ calculamos el argumento
3. $z = 5(\cos 53{,}13^o + i \sin 53{,}13^o)$ obtenemos la forma polar

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ calculamos el módulo
2. $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 53{,}13^o$ calculamos el argumento
3. $z = 5(\cos 53{,}13^o + i \sin 53{,}13^o)$ obtenemos la forma polar
4. $z^6 = 5^6(\cos 6 \cdot 53{,}13^o + i \sin 6 \cdot 53{,}13^o)$

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ calculamos el módulo
2. $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 53{,}13^o$ calculamos el argumento
3. $z = 5(\cos 53{,}13^o + i \sin 53{,}13^o)$ obtenemos la forma polar
4. $z^6 = 5^6(\cos 6 \cdot 53{,}13^o + i \sin 6 \cdot 53{,}13^o)$
5. $z^6 = 15625(\cos 318{,}78^o + i \sin 318{,}78^o)$

Potencias de números complejos

Ejemplo: Fórmula de Moivre

Sea $z = 3 + 4i$, calcular z^6

Solución:

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ calculamos el módulo
2. $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 53{,}13^o$ calculamos el argumento
3. $z = 5(\cos 53{,}13^o + i \sin 53{,}13^o)$ obtenemos la forma polar
4. $z^6 = 5^6(\cos 6 \cdot 53{,}13^o + i \sin 6 \cdot 53{,}13^o)$
5. $z^6 = 15625(\cos 318{,}78^o + i \sin 318{,}78^o)$
6. $z^6 = 11753{,}12 + 10296{,}12i$ forma cartesiana

Potencias de números complejos

Raíces de un número complejo

Si z es un número complejo tal que para un entero positivo n tenga la forma

$$z = w^n$$

donde w es otro complejo, entonces se dice que w es una **raíz** enésima de z. Esto los denotamos como:

$$w = z^{1/b} = \sqrt[n]{z}$$

en los reales, todo número posee una raíz de orden impar y dos raíces de orden par. En los complejos el número raíces es mayor.

Potencias de números complejos

Raíces de un número complejo (cont.)

Todo número complejo tiene exactamente n raíces enésimas. Por ejemplo el complejo $z = 1$ tiene 4 raíces:

Potencias de números complejos

Raíces de un número complejo (cont.)

Todo número complejo tiene exactamente n raíces enésimas. Por ejemplo el complejo $z = 1$ tiene 4 raíces:

$$1^4 = i^4 = (-i^4) = (-1)^4 = 1$$

Potencias de números complejos

Raíces de un número complejo (cont.)

Todo número complejo tiene exactamente n raíces enésimas. Por ejemplo el complejo $z = 1$ tiene 4 raíces:

$$1^4 = i^4 = (-i^4) = (-1)^4 = 1$$

Así 1,-1,i y $-i$ con las raíces cuartas de 1

Potencias de números complejos

Raíces de un número complejo (cont.)

Todo número complejo tiene exactamente n raíces enésimas. Por ejemplo el complejo $z = 1$ tiene 4 raíces:

$$1^4 = i^4 = (-i^4) = (-1)^4 = 1$$

Así $1, -1, i$ y $-i$ con las raíces cuartas de 1
La forma general de encontrar raíces de un número complejo se tiene meidante la siguiente ecuación:

Potencias de números complejos

Raíces de un número complejo (cont.)

Todo número complejo tiene exactamente n raíces enésimas. Por ejemplo el complejo $z = 1$ tiene 4 raíces:

$$1^4 = i^4 = (-i^4) = (-1)^4 = 1$$

Así $1, -1, i$ y $-i$ con las raíces cuartas de 1
La forma general de encontrar raíces de un número complejo se tiene meidante la siguiente ecuación:

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = z^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Potencias de números complejos

Ejemplo 1: Raíces de un número complejo

Encontrar las raíces cúbicas de $z = 8(\cos 30^o + i \sin 30^o)$
Solución: tenemos que $K = 0, 1, 2$

Potencias de números complejos

Ejemplo 1: Raíces de un número complejo

Encontrar las raíces cúbicas de $z = 8(\cos 30^o + i \sin 30^o)$
Solución: tenemos que $K = 0, 1, 2$ Usando la fórmula tenemos:

$$\sqrt[3]{z} = z^{1/3} = z^{1/3}\left(\cos\left(\frac{30^o + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0^o + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

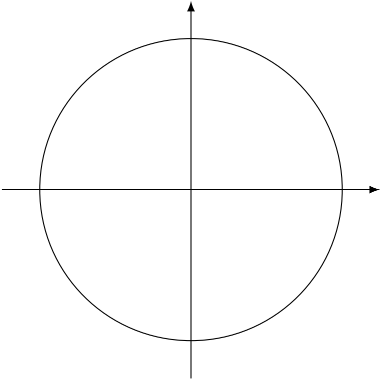
si usamos $2\pi = 360^o$ tenemos:

1. $w_1 = 2(\cos 10^o + i \sin 10^o)$ para $k = 0$
2. $w_2 = 2(\cos 130^o + i \sin 130^o)$ para $k = 1$
3. $w_3 = 2(\cos 250^o + i \sin 250^o)$ para $k = 3$

Potencias de números complejos

Ejemplo 1: Raíces de un número complejo (cont.)

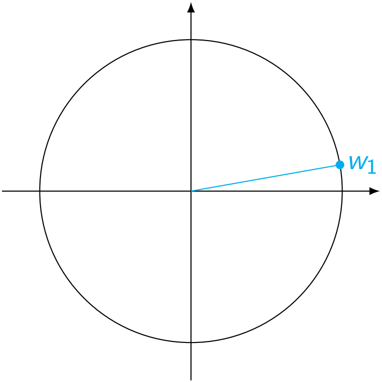
Podemos representar las raíces w_1, w_2 y w_3 en el plano complejo.



Potencias de números complejos

Ejemplo 1: Raíces de un número complejo (cont.)

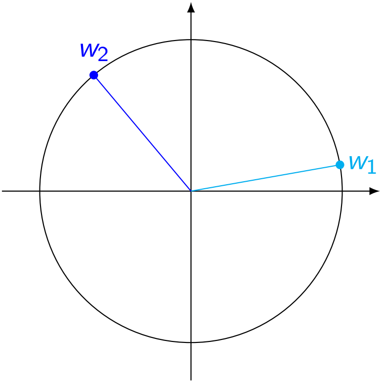
Podemos representar las raíces w_1, w_2 y w_3 en el plano complejo.



Potencias de números complejos

Ejemplo 1: Raíces de un número complejo (cont.)

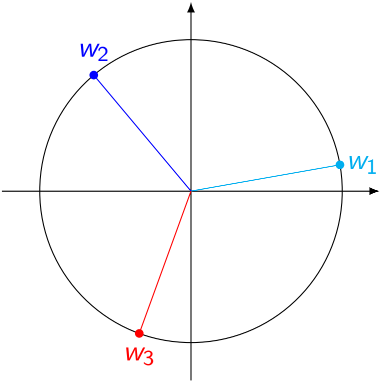
Podemos representar las raíces w_1, w_2 y w_3 en el plano complejo.



Potencias de números complejos

Ejemplo 1: Raíces de un número complejo (cont.)

Podemos representar las raíces w_1, w_2 y w_3 en el plano complejo.



Potencias de números complejos

Ejemplo 2: Raíces de un número complejo

Encontrar las raíces sextas de $z = 2(\cos 60^o + i \sin 60^o)$
Solución: tenemos que $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

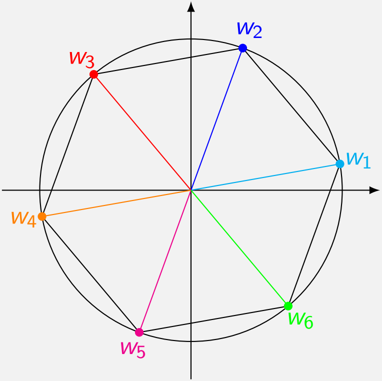
$$\sqrt[3]{z} = z^{1/3} = z^{1/3}\left(\cos\left(\frac{30^o + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0^o + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

1. $w_1 = 2(\cos 10^o + i\sin 10^o)$ para $k = 0$
2. $w_2 = 2(\cos 70^o + i\sin 70^o)$ para $k = 1$
3. $w_3 = 2(\cos 130^o + i\sin 130^o)$ para $k = 2$
4. $w_4 = 2(\cos 190^o + i\sin 190^o)$ para $k = 3$
5. $w_5 = 2(\cos 250^o + i\sin 250^o)$ para $k = 4$
6. $w_6 = 2(\cos 310^o + i\sin 310^o)$ para $k = 5$

Potencias de números complejos

Ejemplo 2: Raíces de un número complejo (cont)

Podemos representar las raíces w_1, w_2 y w_3,w_4, w_5 y w_6 en el plano complejo.



Potencias de números complejos

Ejercicios

- Usando la forma polar, realice las siguientes operaciones
    1. $(1+i)^4$
    2. $(\sqrt{3}+i)^7$
    3. $(1+i)^{-3}$
- Calcular todas las raíces cuartas del complejo $z = 2 + i$ y representarlas gráficamente.
- Calcular las raíces cúbicas de los siguiente números complejos
    1. $z = 1 - i$
    2. $z = -1 - i$
    3. $z = \sqrt{3} + i$
    4. $z = 1 - \sqrt{3}i$
    5. $z = 8$

Potencias de números complejos

Ejercicios

- Encuentre el valor de z que satifaga las siguiente ecuaciones
  1. $z^3 + 4 = 5 + i$
  2. $z^4 + 2i = 6 + 3i$
  3. $z^5 + 16 = 0$
- Delimitar en el plano complejo las regiones descritas por las siguientes inecuaciones
  1. $|z| \leq 3$
  2. $|z - 5| < 4$
  3. $Re(z) < 12$
  4. $Im(z) \geq 4$

La fórmula de Euler

El Número e

Una de las constantes más recurrentes en matemáticas es el número e o Número de Euler, cuyo valor aproximado es:

$$e \approx 2{,}71828182846$$

La fórmula de Euler

El Número e

Una de las constantes más recurrentes en matemáticas es el número e o Número de Euler, cuyo valor aproximado es:

$$e \approx 2{,}71828182846$$

Esta constante aparece en conexión con los números complejos, mediante la relación:

La fórmula de Euler

El Número e

Una de las constantes más recurrentes en matemáticas es el número e o Número de Euler, cuyo valor aproximado es:

$$e \approx 2{,}71828182846$$

Esta constante aparece en conexión con los números complejos, mediante la relación:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

La fórmula de Euler

El Número e

Una de las constantes más recurrentes en matemáticas es el número e o Número de Euler, cuyo valor aproximado es:

$$e \approx 2{,}71828182846$$

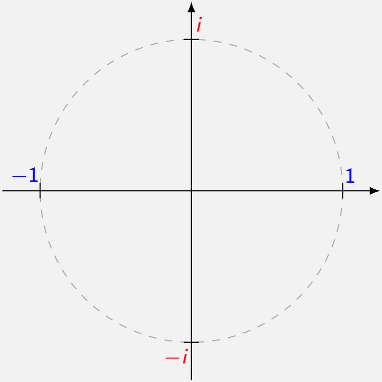
Esta constante aparece en conexión con los números complejos, mediante la relación:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

donde el lado derecho representa un complejo en el círculo unitario de ángulo θ. Esta fórmula se conoce con el nombre de Fórmula de Euler en honor a Leonhard Euler, quien la definió cerca de 1740.

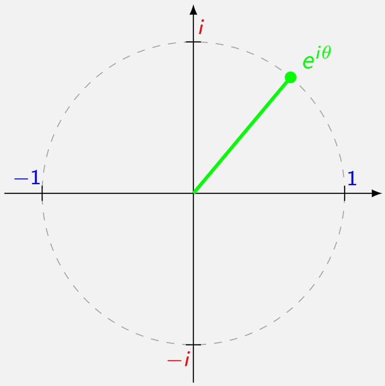
La fórmula de Euler

La fórmula de Euler



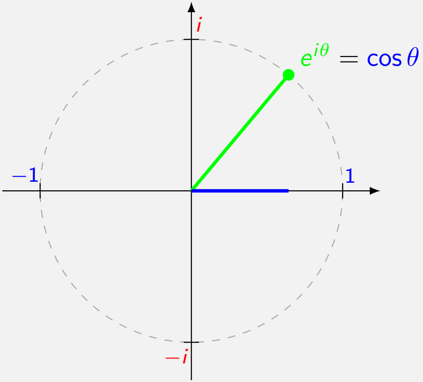
La fórmula de Euler

La fórmula de Euler



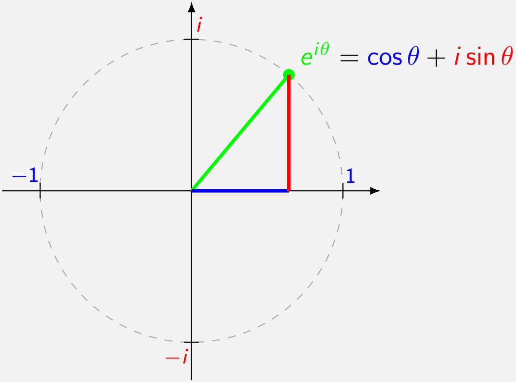
La fórmula de Euler

La fórmula de Euler



La fórmula de Euler

La fórmula de Euler



La fórmula de Euler

La Identidad de Euler

La identidad de Euler es escrita de la siguiente manera:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Sustituyendo $\theta = \pi$ en la fórmula de Euler

La fórmula de Euler

La Identidad de Euler

La identidad de Euler es escrita de la siguiente manera:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Sustituyendo $\theta = \pi$ en la fórmula de Euler $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$

La fórmula de Euler

La Identidad de Euler

La identidad de Euler es escrita de la siguiente manera:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Sustituyendo $\theta = \pi$ en la fórmula de Euler $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$
- $e^{i\pi} = -1 + i0$

La fórmula de Euler

La Identidad de Euler

La identidad de Euler es escrita de la siguiente manera:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Sustituyendo $\theta = \pi$ en la fórmula de Euler $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$
- $e^{i\pi} = -1 + i0$
- $e^{i\pi} + 1 = 0$

Números complejos en forma exponencial

Ya conocemos:

- $z = a + bi$ forma cartesiana
- $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ forma polar

Utilizando fórmula de Euler podemos escribir cualquier número complejo como:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$$

Números complejos en forma exponencial

Dados números complejos z_1 y z_2, con módulos $|z_1|$ y z_2 respectivamente y argumentos θ_1 y θ_2 tenemos:

- $z_1 \cdot z_1 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ multiplicación
- $z_1 \cdot z_1 = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ división