Sistemas de ecuaciones lineales

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Introducción

Recuérde que una ecuación lineal con dos variables x y y es una ecuación que puede escribirse de la forma $ax + by = c$

- donde a y b son números reales distintos de cero.
- En general, una ecuación lineal con n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ es una ecuación de la forma.

$$a_1x_1 + a_2x_2+, ..., a_n = 0$$

Introducción

$$a_1x_1 + a_2x_2+, ..., a_nx_n = b$$

- donde los números reales $a_1, a_2, ..., a_n$ no todos son cero.
- El número b es el término constante de la ecuación.
- La ecuación previa es de de primer grado porque el exponente de cada una de las n variables es 1.
- En las siguiente secciones examinaremos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Terminología

- Un sistema de ecuaciones consta de dos o más ecuaciones y cada una de ellas tiene por lo menos una variable.
- Si cada ecuación del sistema es lineal, decimos que se trata de un sistema de ecuaciones lineales
- Siempre que sea posible, utilizaremos los símbolos ya conocidos x, y y z para representar variables en un sistema. Por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 2 \\ -x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ \ \ x + 3y + \ \ z = 2 \\ -x - \ \ y + 5z = 14 \end{cases}$$

- Sistema lineal de tres ecuaciones con tres variables.
- El objetivo es resolverlo simultáneamente
- Una solución de un sistema de n ecuaciones con n variables está formada por valores de las variables que satisfacen cada ecuación del sistema.

Solución del sistema

Una solución del sistema de ejemplo se escribe también como una tupla ordenada de n elementos. Por ejemplo, los valores $x = 2, y = -1$ y $z = 3$ satisfacen simultáneamente cada ecuación del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 2 \\ -x - y + 5z = 14 \end{cases} \xrightarrow[y\ z\,=\,3]{\substack{\text{sustituyendo} \\ x\,=\,2,\ y\,=\,-1,}} \begin{cases} 2\cdot 2 + (-1) - 3 = 4 - 4 = 0 \\ 2 + 3(-1) + 3 = 5 - 3 = 2 \\ -2 - (-1) + 5\cdot 3 = 16 - 2 = 14 \end{cases}$$

Solución del sistema

- Los valores que satisface las tres ecuaciones a la vez constituyen una solución.
- Por otra parte, esta solución también puede escribirse como la tripleta ordenada $(2, -1, 3)$.
- Para resolver un sistema de ecuaciones debemos determinar el conjuto de todas soluciones A.
- Se realizan operaciones en el sistema para transformarlo en un conjunto de ecuaciones equivalente.
- Se dice que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen exactamente los mismos conjuntos solución.

Sistemas lineales con dos variables

El sistema lineal más sencillo consta de dos ecuaciones con dos variables: Debido a que la gráfica de una ecuación lineal $ax - by = c$ es una línea recta, el sistema determina dos líneas rectas en el plano xy.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Sistemas consistentes e inconsistentes

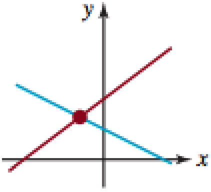
Como se muestra en la siguiente figura hay tres casos posibles para las gráficas de los sistemas de lineales con dos variables:

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas consistentes e inconsistentes

Como se muestra en la siguiente figura hay tres casos posibles para las gráficas de los sistemas de lineales con dos variables:

- a) Las rectas se intersecan en un solo punto.



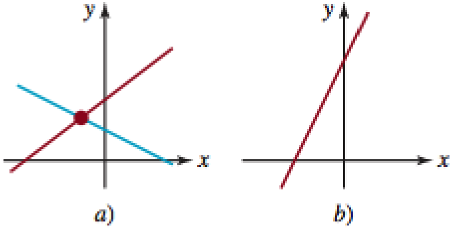
a)

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas consistentes e inconsistentes

Como se muestra en la siguiente figura hay tres casos posibles para las gráficas de los sistemas de lineales con dos variables:

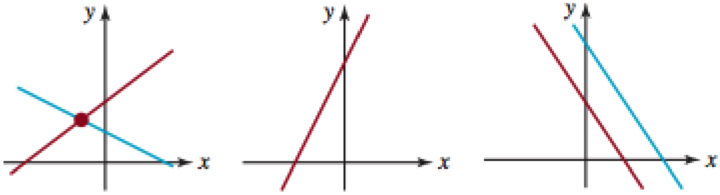
- a) Las rectas se intersecan en un solo punto.
- b) Las ecuaciones describen la misma recta.



Sistemas consistentes e inconsistentes

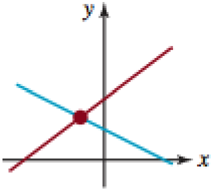
Como se muestra en la siguiente figura hay tres casos posibles para las gráficas de los sistemas de lineales con dos variables:

- a) Las rectas se intersecan en un solo punto.
- b) Las ecuaciones describen la misma recta.
- c) Las dos rectas son paralelas.

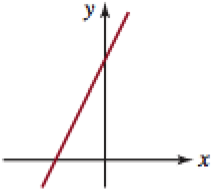


a) b) c)

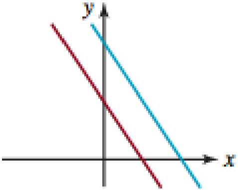
Sistemas de ecuaciones lineales



a)

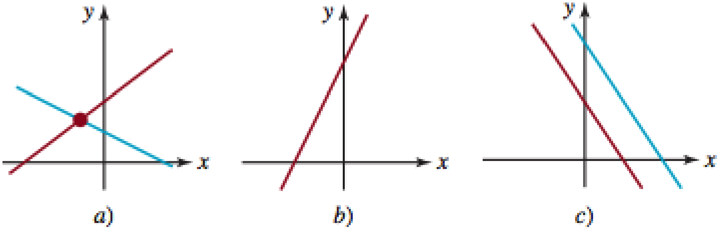


b)



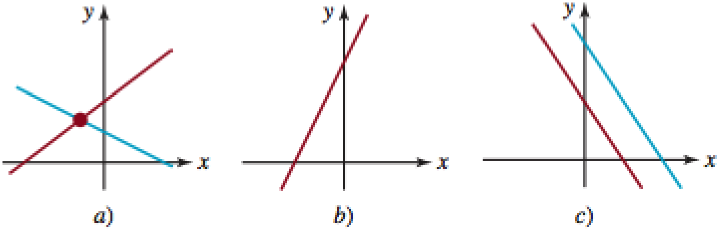
c)

Sistemas de ecuaciones lineales



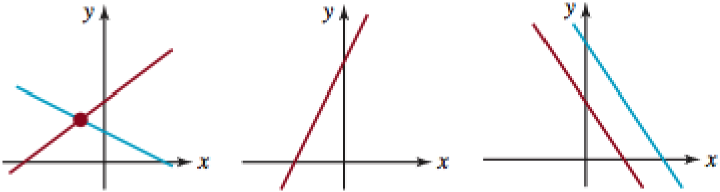
- a) El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Tiene exactamente una solución, en la intersección de las rectas.

Sistemas de ecuaciones lineales



- a) El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Tiene exactamente una solución, en la intersección de las rectas.
- b) El sistema es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Tiene infinitas soluciones, son la misma recta.

Sistemas de ecuaciones lineales



a) *b)* *c)*

- a) El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Tiene exactamente una solución, en la intersección de las rectas.
- b) El sistema es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Tiene infinitas soluciones, son la misma recta.
- c) El sistema es inconsistente. Las rectas son paralelas y, por consiguiente, no hay soluciones

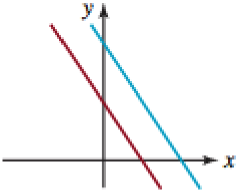
Sistema inconsistente

Por ejemplo, las ecuaciones del sistema lineal

$$x - y = 0$$

$$x - y = 3$$

son rectas paralelas. Por tanto, el sistema es inconsistente.



c)

Métodos de solución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con pocas variables podemos usar los métodos de sustitución o de eliminación.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

i) Use una de las ecuaciones del sistema para resolver una variable en términos de las otras.

ii) Sustituya esta expresión en las otras ecuaciones.

iii) Si una de las ecuaciones obtenidas en el paso *ii*) contiene una variable, resuélvala. De lo contrario, repita *i*) hasta obtener una ecuación con una sola variable.

iv) Por último, use la sustitución inversa para hallar los valores de las variables restantes.

Ejemplo 1: Método de sustitución

Resuelva el sistema

$$3x + 4y = -5$$

$$2x - y = 4$$

Ejemplo 1: Método de sustitución

- Despejamos y de la segunda ecuación $y = 2x - 4$
- Sustituimos y en la primera ecuación y y despejando x: $3x + 4(2x - 4) = -5$
- Simplificamos $11x = 11$ o $x = 1$
- Sustituyendo el valor obtenido en la primera ecuación: $3(1) + 4y = -5$
- Despejamos y simplificamos $4y = -8$ o $y = -2$
- Así, la única solución del sistema es $(1, -2)$. El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes.

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas lineales con tres variables

En cálculo se demuestra que la gráfica de una ecuación lineal con tres variables,

$$ax + by + cz = d,$$

donde a, b y c no son todos cero, determina un plano en el espacio tridimensional. una solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Solución

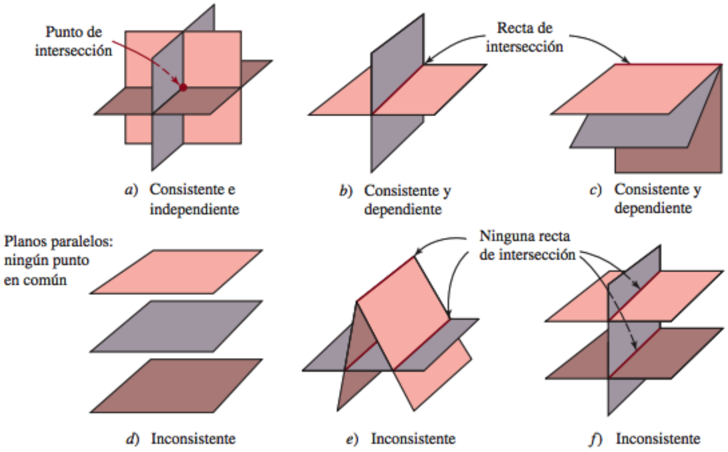
es una tripleta ordenada de la forma (x, y, z); una tripleta ordenada de números representa un punto en el espacio tridimensional.

Solución

La intersección de los tres planos que describe el sistema puede ser:

- Un solo punto,
- Una cantidad infinita de puntos
- Ningún punto

Igual que el caso anterior tenemos:



Método de eliminación

En el método siguiente que ilustramos se utilizan operaciones de eliminación. Cuando se aplican a un sistema de ecuaciones, estas operaciones producen un sistema de ecuaciones equivalente.

Sistemas de ecuaciones lineales

MÉTODO DE ELIMINACIÓN

i) Intercambie dos ecuaciones cualesquiera en un sistema.

ii) Multiplique una ecuación por una constante que no sea cero.

iii) Sume un múltiplo constante que no sea cero de una ecuación del sistema a otra ecuación del mismo sistema.

Ejemplo 2: Eliminación y sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases}$$

Primero eliminamos x de las ecuaciones 2 y 3:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= -6 \\ 4x - 2y - z &= -4 \\ 2x - y + 3z &= 19 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[-2E_1 + E_3]{-4E_1 + E_2} \begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ -5y + z = 31. \end{cases}$$

Ejemplo 2: Eliminación y sustitución hacia atrás

Luego eliminamos y de la tercera ecuación y obtenemos un sistema equivalente en forma triangular:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= -6 \\ -10y - 5z &= 20 \\ -5y + z &= 31 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-\frac{1}{2}E_2 + E_3} \left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= -6 \\ -10y - 5z &= 20 \\ \tfrac{7}{2}z &= 21. \end{aligned}\right.$$

Ejemplo 2: Eliminación y sustitución hacia atrás

Llegamos a otra forma triangular equivalente al sistema original si multiplicamos la tercera ecuación por $\frac{2}{7}$.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= -6 \\ -10y - 5z &= 20 \\ \tfrac{7}{2}z &= 21 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\frac{2}{7}E_3} \left\{\begin{aligned} x + 2y + \phantom{\tfrac{1}{2}}z &= -6 \\ y + \tfrac{1}{2}z &= -2 \\ z &= 6. \end{aligned}\right.$$

Ejemplo 2: Eliminación y sustitución hacia atrás

- Del último sistema tenemos que $z = 6$
- Ese valor lo sustituimos en

$$y = -\frac{1}{2}z - 2 = \frac{1}{2}(6) - 2 = -5$$

- Por último, sustituimos y $y = -5$ y $z = 6$ en la ecuación

$$x = -2y - z - 6 = -2(-5) - 6 - 6 = -2$$

.

Ejemplo 3: Eliminación y sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 5x-2y+2z=0 \\ 8x+y+5z=6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 5x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 8x & + & y & + & 5z & = & 6 \end{array}\right\} \xrightarrow[-8E_1+E_3]{-5E_1+E_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & -7y & - & 3z & = & -10 \\ & & -7y & - & 3z & = & -10. \end{array}\right.$$

Ejemplo 3: Eliminación y sustitución hacia atrás

Este sistema, a su vez, equivale al sistema en forma triangular:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ -7y - 3z = -10 \\ -7y - 3z = -10 \end{array}\right\} \xrightarrow[-E_2 + E_3]{-E_2} \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 7y + 3z = 10 \\ 0z = 0. \end{array}\right.$$

Ejemplo 3: Eliminación y sustitución hacia atrás

En este sistema es posible determinar valores únicos para x, y y z. Cuando mucho, podemos resolver dos variables en términos de la restante.

- Por ejemplo, de la segunda ecuación obtenemos y en términos de z:
$$y = \frac{3}{7}z + \frac{10}{7}$$
- Sustituimos a y en la primera ecuación para despejar x y obtenemos
$$x + (-\frac{3}{7}z + \frac{10}{7}) + z = 2 \text{ o } x = -\frac{4}{7}z + \frac{4}{7}$$

Ejemplo 3: Eliminación y sustitución hacia atrás

Así, en las soluciones de y y x podemos elegir el valor de z arbitrariamente. $\begin{cases} y = \frac{3}{7}z + \frac{10}{7} \\ x = -\frac{4}{7}z + \frac{4}{7} \end{cases}$

obtenemos las soluciones

- $(\frac{4}{7}, \frac{10}{7}, 0)$
- $(1, 0, 1)$
- $(-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, 2)$

En otras palabras, el sistema es consistente y tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 4: Sin solución

Resolver

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 8x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x & - \; y & - \; z & = 0 \\ 2x & + \; 3y & & = 1 \\ 8x & & -3z & = 4 \end{array}\right\} \xrightarrow[-4E_1 + E_3]{-E_1 + E_2} \left\{\begin{array}{rl} 2x - y - z & = 0 \\ 4y + z & = 1 \\ 4y + z & = 4 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x & - \; y & - \; z & = 0 \\ & 4y & + \; z & = 1 \\ & 4y & - \; z & = 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{-E_2 + E_3} \left\{\begin{array}{rl} 2x - y - z & = 0 \\ 4y + z & = 1 \\ 0z & = 3, \end{array}\right.$$

La última ecuación $0z = 3$ no se satisface con ningún valor de z, puesto que $0 \neq 3$. Por tanto, el sistema es inconsistente y no tiene soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas homegéneos

Se dice que un sistema lineal en el que todos los términos constanstes son 0. Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

- Una solución de un sistema es cuando todas variables son cero, se llama **solución cero** o **solución trivial**.
- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene al menos la solución cero, por tanto siempre *consistente*.
- Un sistema homogéneo puede tener infinitas soluciones diferentes de cero.

Ejemplo 5: Sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

En este caso, los pasos de eliminación resultan en:

$$\begin{cases} x + \ y + \ \ z = 0 \\ \qquad 7y + 3z = 0 \\ \qquad\qquad 0z = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 5: Sistema homogéneo

- Podemos escoger $z = \alpha$, donde a es un número real, por la segunda ecuación del último sistema tenemos que $y = -\frac{3}{7}\alpha$.
- Después, usando la primera ecuación, obtenemos $x = -\frac{4}{7}\alpha$.
- las soluciones del sistema constan de todas las tripletas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha, -\frac{3}{7}\alpha, \alpha)$

Ejemplo 5: Sistema homogéneo

Las soluciones del sistema constan de todas las tripletas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha, -\frac{3}{7}\alpha, \alpha)$

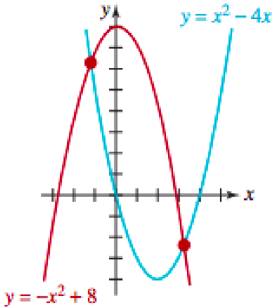
- Para $\alpha = 0$, obtenemos la solución trivial $(0, 0, 0)$
- Para $\alpha = -7$, obtenemos la solución trivial $(4, 3, -7)$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

$$
x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \qquad \text{para } i = n-1, n-2, \ldots, 1
$$

Sistemas no lineales

En la siguiente figura, las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 4x$ y $y = -x^2 + 8$ tienen intersecciones en dos puntos. Así, las coordenadas de los puntos de intersección deben satisfacer las dos ecuaciones de forma simultanea.



Sistemas de ecuaciones no lineales

Sistemas no lineales

- Recuerde, que toda ecuación que pueda escribirse en la forma $ax + by + c = 0$ es una ecuación lineal con dos variables.
- Una ecuación no lineal es simplemente una ecuación que, como su nombre lo indica, no es lineal.
- Por ejemplo, en el sistema con las ecuaciones $y = x^2 - 4x$ y $y = -x^2 + 8$ son no lineales.
- Llamaremos sistema de ecuaciones no lineales, o simplemente sistema no lineal, a un sistema de ecuaciones en el que por lo menos una de las ecuaciones no sea lineal.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Ejemplo 6: Sistema no lineal

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$$

- Puesto que la primera ecuación ya expresa y en términos de x, sustituimos esta expresión por y en la segunda ecuación para obtener una sola ecuación con una variable:
$$x^2 - 4x = -x^2 + 8$$

Ejemplo 6: Sistema no lineal

- Simplificando la última ecuación obtenemos una ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 4 = 0$, que resolveremos con la fórmula cuadrática:

$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Ejemplo 6: Sistema no lineal

- Luego sustituimos hacia atrás cada uno de estos números en la primera ecuación para obtener los valores correspondientes de y

$$\begin{cases} y = (1-\sqrt{5})^2 - 4(1-\sqrt{5} = 2+2\sqrt{5}) \\ y = (1+\sqrt{5})^2 - 4(1+\sqrt{5} = 2-2\sqrt{5}) \end{cases}$$

- Las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} (1-\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5}) \\ (1+\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5}) \end{cases}$$

Ejemplo 7: Resolución de un sistema no lineal

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^4 - 2(10^{2y}) - 3 = 0 \\ x - 10^y = 0 \end{cases}$$

- De la segunda ecuación, tenemos que $x = 10^y$ por consiguiente, $x^2 = 10^{2y}$. Al sustituir este último resultado dentro de la primera ecuación tenemos:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \\ (x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7: Resolución de un sistema no lineal

- Puesto que $x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales x, $x = \pm\sqrt{3}$. Pero como $10^y > 0$ para toda y; la única elección es $x = \sqrt{3}$.
- Resolviendo$\sqrt{3} = 10^y$ para y obtenemos

$$y = log_{10}\sqrt{3} \ o \ y = \frac{1}{2} log_{10}3$$

- por tanto,$x = \sqrt{3}, y = \frac{1}{2}log_{10}3$ es la única solución del sistema