Matrices y Determinantes

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Introducción

Ya resolvimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases}$$

- mediante el método de eliminación encontramos el sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ y + \frac{1}{2}z = -1 \\ z = 6. \end{cases}$$

Matrices aumentadas

- El sistema se obtuvo por medio de una serie de operaciones que cambiaron los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho de cada ecuación.
- En todo este procedimiento, las variables actuaron como "marcadores de posición".
- Por tanto, estos cálculos pueden simplificarse ejecutando operaciones entre las filas de la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right].$$

Sistemas lineales: matrices aumentadas

Matrices aumentadas

La matriz en anterior se llama **matriz aumentada** del primer sistema y está formada por la **matriz de coeficientes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

- La línea vertical en una matriz aumentada permite distinguir los coeficientes de las variables del sistema de los términos constantes de éste.

Eliminación gaussiana

Para resolver un sistema usando una matriz aumentada se emplea la eliminación gaussiana o la eliminación de Gauss-Jordan.

- En la eliminación gaussiana se reduce por filas la matriz aumentada del sistema hasta llegar a una matriz aumentada equivalente en forma escalonada por filas.

Forma escalonada por filas

Una matriz está en forma escalonada por filas cuando:

1. En la primera entrada de cada fila diferente de cero está el número 1.
2. En las filas consecutivas diferentes de cero, la primera entrada 1 de la fila más baja aparece a la derecha del 1 de la fila más alta.
3. Las filas donde las entradas son todas cero aparecen en la base de la matriz.

Ejemplo 1: Uso de la eliminación gaussiana

Aplique el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + 5y + 6z = 7 \\ x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

- Formamos la matriz aumentada del sistema y aplicamos operaciones entre filas hasta obtener la forma escalonada por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Sistemas lineales: matrices aumentadas

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

- La última matriz aumentada está en forma escalonada por filas y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ \quad\;\; y + 2z = \frac{5}{4} \\ \qquad\quad\;\; z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ \quad\;\; y + 2z = \frac{5}{4} \\ \qquad\quad\;\; z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

- De la última ecuación, vemos inmediatamente que $z = -\frac{1}{2}$
- De la segunda ecuación, obtenemos $y + 2(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ o $y = \frac{9}{4}$
- Finalmente, la primera ecuación nos da $x + \frac{2}{4} - 2(\frac{1}{2}) = 2$ o $x = (-\frac{5}{4})$
- Por consiguiente, $x = -\frac{5}{4}, y = -\frac{9}{4}, z = -\frac{1}{2}$

Sistemas lineales: matrices aumentadas

Ejemplo 2: Forma escalonada reducida por filas

- Compruebe si la siguientes matrices aumentadas están en forma escalonada reducida por filas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Sistemas lineales: matrices aumentadas

Ejemplo 3: Forma escalonada reducida por filas

- La siguienten matriz tiene forma escalonada por filas.
- Sin embargo, la matriz aumentada no tiene forma escalonada reducida por filas porque las entradas restantes (indicadas en rojo) de las columnas que contienen 1 como primera entrada no son todas cero.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Forma escalonada reducida por filas

- Cabe señalar que en la eliminación gaussiana nos detenemos cuando hemos obtenido una matriz aumentada en forma escalonada por filas.
- Este método requiere después de la sustitución hacia atrás.
- En la eliminación de **Gauss-Jordan** terminamos cuando hemos obtenido la matriz aumentada en forma escalonada reducida por filas (los valores de la diagonal principal son igual a 1 y todos los demás 0).

Sistemas lineales: matrices aumentadas

Forma escalonada reducida por filas

- Toda secuencia de operaciones entre filas producirá la misma matriz aumentada en forma escalonada reducida por filas.
- Este método no necesita sustitución hacia atrás; la solución del sistema será evidente por inspección de la última matriz.
- En términos de las ecuaciones del sistema original, nuestro objetivo es simplemente igualar a 1 el coeficiente de la primera variable de la primera ecuación
- Luego usar múltiplos de esa ecuación para eliminar la variable de las demás ecuaciones.
- El proceso se repite con las otras variables.

Ejemplo 4: Sistema inconsistente

- Use la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = -6 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

Ejemplo 4: Sistema inconsistente

- Use la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = -6 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

- En el proceso de aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz del sistema nos detenemos en

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{entre filas}]{\text{operaciones}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right].$$

Sistemas lineales: matrices aumentadas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{entre filas}]{\text{operaciones}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right].$$

- La tercera fila de la última matriz significa que $0x + 0y = 16(o\ 0 = 16)$.
- Como no hay números x y y que puedan satisfacer esta ecuación, concluimos que **el sistema no tiene solución**, es decir, es inconsistente.

Solución mediante matrices inversas

Podemos resolver sistemas lineales con n ecuaciones y n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siempre y cuando el $det\ A \neq 0$.

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Solución mediante matrices inversas

Usando la multiplicación e igualdad de matrices podemos escribir el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solución mediante matrices inversas

En otras palabras, si A es una matriz de coeficientes de un sistema podemos escribir como:

$$AX = B$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: Forma matricial inversas

Escriba en forma matricial el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x - y = 6 \\ 9x + 2y = -5 \end{cases}$$

Ejemplo 5: Forma matricial inversas

Escriba en forma matricial el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x - y = 6 \\ 9x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Solución matricial

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B, \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$