

# Matrices y Determinantes

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

## Introducción a las matrices

El método de resolución, y la resolución misma de un sistema de ecuaciones lineales, no depende de ninguna manera de los símbolos que se usen como variables. Ya hemos resuelto el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 variables:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases}$$

## Introducción a las matrices

La solución es  $x = -2$ ,  $y = -5$ ,  $z = 6$  o como tripleta ordenada:  $(-2, -5, 6)$ . Esta misma tripleta ordenada también es una solución de las siguientes ecuaciones (note que solo se renombran las variables).

$$\begin{cases} u + 2v + w = -6 \\ 4u - 2v - w = -4 \\ 2u - v + 3w = 19 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} r + 2s + t = -6 \\ 4r - 2s - t = -4 \\ 2r - s + 3t = 19. \end{cases}$$

## Introducción a las matrices

La solución de un sistema de ecuaciones lineales depende solamente de los coeficientes y constantes que aparecen en el sistema y no de los símbolos que se utilizan para representar las variables. Podemos arreglar los coeficientes como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{bmatrix}.$$

# Matrices y Determinantes

- Donde la primera, segunda y tercera columnas representan los coeficientes de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y la última columna está formada por las constantes a la derecha del signo de igualdad.
- Antes de examinar esta idea necesitamos desarrollar un sistema matemático cuyos elementos sean arreglos ordenados de números.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{bmatrix}.$$

# Matrices y Determinantes

## Matriz

Una **matriz**  $A$  es un arreglo ordenado rectangular de números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

## Terminología

- Si hay  $m$  filas y  $n$  columnas, decimos que el orden de la matriz es  $m \times n$ , y si  $n \neq m$  nos referimos a ella como **matriz** de  $m$  por  $n$  o, simplemente, como matriz rectangular.
- Una matriz  $n \times n$  se llama matriz cuadrada y se dice que es de orden  $n$ .
- La entrada, o elemento en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna de una matriz  $A$  de  $m \times n$  se representa como  $a_{ij}$ . Así, la entrada, por ejemplo, en la tercera fila y la cuarta columna de una matriz  $A$  es  $a_{34}$ .

## Ejemplo 1: Orden

A continuación se muestran algunos ejemplos de matrices.

- La matriz  $A$  es de  $2 \times 3$ , mientras que  $B$  es de  $3 \times 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Una matriz cuadrada de  $2 \times 2$  (también se denomina como de segundo orden)

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -3 & \pi \end{bmatrix}$$

## Notación matricial

- Una matriz de  $1 \times n$  consta de una fila y  $n$  columnas y se llama **matriz fila** o **vector fila**.
- Por otra lado, una matriz de  $m \times 1$  tiene  $m$  filas y una columna; y se denomina **matriz columna** o **vector columna**.
- Para ahorrar tiempo y espacio al escribir es conveniente usar una notación especial para una matriz general. Una matriz  $A$  de  $m \times n$  suele escribirse abreviadamente como  $A = (a_{ij})_{m \times n}$

## Ejemplo 2: Construya una matriz

Construya una matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$  si  $a_{ij} = i + j$  para cada  $i$  posición  $i$  y  $j$ .

- Para obtener la entrada de la primera fila y la primera columna sea  $i = 1$  y  $j = 1$ ; esto es  $a_{11} = 1 + 1 = 2$ . El resto de las entradas se obtienen de manera similar:

## Ejemplo 2: Construya una matriz

Construya una matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$  si  $a_{ij} = i + j$  para cada  $i$  posición  $i$  y  $j$ .

- Para obtener la entrada de la primera fila y la primera columna sea  $i = 1$  y  $j = 1$ ; esto es  $a_{11} = 1 + 1 = 2$ . El resto de las entradas se obtienen de manera similar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 + 2 \\ 2 + 1 & 2 + 2 \\ 3 + 1 & 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

## Diagonal principal

Las entradas donde  $i = j$  ( $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots a_{nn}$ ) en una matriz cuadrada se dice que forman la **diagonal principal**. Por ejemplo, en las siguientes matrices las entradas de la diagonal principal se muestran resaltadas en rojo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

## Igualdad de matrices

- Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y si sus correspondientes entradas (para cada  $ij$ ) son iguales
- Si  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (B_{ij})_{m \times n}$ , entonces  $A = B$  si y solo si  $a_{ij} = b_{ij}$  para toda  $i$  y toda  $j$ .

# Matrices y Determinantes

## Ejemplo 3: Igualdad de dos matrices

A continuación se muestran algunos ejemplos relativos a igualdad de matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & -3 \\ 0 & -\pi & \sqrt{2} & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{100} & 0.5 & \sqrt{4} & -3 \\ 0 & (-1)\pi & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

## Ejemplo4: Ecuación matriz

Determine los valores de  $x$  y  $y$  para las dos matrices sean iguales.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y + 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Ejemplo4: Ecuación matriz

Determine los valores de  $x$  y  $y$  para las dos matrices sean iguales.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y + 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Igualamos las entradas correspondientes. Tenemos  $-1 = 2y + 1$  y  $x^3 = 8$ .
- Resolviendo las ecuaciones obtenemos  $y = -1$  y  $x = 2$ .

## Matriz transpuesta

La transpuesta de una matriz  $A$  de  $m \times n$  es la matriz  $A^T$  dada por;

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5: Matriz transpuesta

Obtenga la matriz transpuesta de

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 10 \\ 6 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } b) B = [5 \quad 3].$$

## Álgebra de matrices

- En álgebra común, damos por sentado el hecho de que cualquier par de números reales pueden sumarse, restarse y multiplicarse.
- En álgebra de matrices, sin embargo, dos matrices pueden sumarse, restarse y multiplicarse sólo en ciertas condiciones.

## Suma de dos matrices

Si  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  entonces una **suma** esta dada por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

## Ejemplo 6: Suma de dos matrices

Sumar las siguientes matrices.

- Como las dos matrices son de  $2 \times 3$  es posible realizar la operación

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 6: Suma de dos matrices

Sumar las siguientes matrices.

- Como las dos matrices son de  $2 \times 3$  es posible realizar la operación

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + 3 & 2 + 1 & 0 + 3 \\ 7 + (-5) & 3 + 0 & -4 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Ejemplo 7: Suma de dos matrices

Si las matrices  $A$  y  $B$  son de diferente orden no pueden sumarse.

- Como  $A$  es  $2 \times 3$  y  $B$  de  $2 \times 2$ , no podemos sumarlas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

## Asociatividad y conmutatividad

Se deduce directamente de las propiedades de los números reales y de la definición de la suma que la operación de adición en el conjunto de matrices de  $m \times n$  satisface las siguientes dos propiedades conocidas:

$$\text{Ley conmutativa : } A + B = B + A$$

$$\text{Ley asociativa : } A + (B + C) = (A + B) + C$$

## Identidad aditiva

- Una matriz cuyas entradas son ceros en su totalidad es una matriz cero y se simboliza con  $O$ .
- Si  $A$  y  $O$  son ambas matrices de  $m \times n$ , entonces tenemos que  $A + O = O + A = A$  para cada matriz  $A$  de  $m \times n$ .
- Decimos que la matriz cero  $O$  de  $m \times n$  es la identidad aditiva del conjunto de matrices de  $m \times n$ . Por ejemplo, para el conjunto de matrices de  $3 \times 2$ , la matriz cero es.

## Identidad aditiva

- Por ejemplo, para el conjunto de matrices de  $3 \times 2$ , la matriz cero es.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

## Producto escalar

- En el estudio de matrices, los números reales se llaman escalares.
- Si  $k$  es un número real, el **producto escalar** de una matriz  $a$  y un número real  $k$  es la matriz  $kA$
- Cada entrada en  $kA$  será igual al producto del número real  $k$  y la entrada correspondiente en la matriz dada.

## Producto escalar

Si  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $k$  un número real, entonces el **producto escalar** de  $A$  y  $k$  está dado por:

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

## Producto escalar

Determine el producto escalar  $kA$  para  $k = 3$  y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

## Producto escalar

Determine el producto escalar  $kA$  para  $k = 3$  y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(3) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

## Ejemplo 8: Diferencia

Realice la diferencia de las siguientes matrices:  $A = [1 \ 2 \ 3]$  y  $B = [-2 \ 7 \ 4]$

- como  $A$  y  $B$  son del mismo orden ( $1 \times 3$ ) su diferencia es:

## Ejemplo 8: Diferencia

Realice la diferencia de las siguientes matrices:  $A = [1 \ 2 \ 3]$  y  $B = [-2 \ 7 \ 4]$

- como  $A$  y  $B$  son del mismo orden ( $1 \times 3$ ) su diferencia es:

$$A - B = [1 \ 2 \ 3] - [-2 \ 7 \ 4]$$

$$A - B = [(1 - (-2)) \ (2 - 7) \ (3 - 4)] = [3 \ -5 \ -1]$$

## Multiplicación de dos matrices

- Para hallar el producto  $AB$  de dos matrices  $A$  y  $B$  necesitamos que el número de columnas de  $A$  sea igual al número de filas en  $B$ .
- Suponga que  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  es una matriz de  $m \times n$  y  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  es una matriz de  $n \times p$ .
- La matriz resultante  $C = AB$  será la multiplicación de las parejas con los números de la fila  $i$ -ésima de  $A$  con los de la columna  $j$ -ésima de  $B$ .

# Matrices y Determinantes

## Multiplicación de dos matrices

Cada entrada  $c_{ij}$  se calcula como:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

The diagram shows the multiplication of two matrices. The first matrix has a row labeled "fila  $i$ -ésima" highlighted in red, with elements  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ . The second matrix has a column labeled "columna  $j$ -ésima" highlighted in red, with elements  $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ . The resulting product matrix has an element  $c_{ij}$  in the same row and column, also highlighted in red. The equation is: 
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{fila } i\text{-ésima} & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{fila } i\text{-ésima} & c_{ij} & \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

## Multiplicación de dos matrices

- El producto de la fila  $i$ -ésima de  $A$  y la fila  $j$ -ésima de  $B$ .
- El producto  $AB$  tendrá  $m$  filas y  $p$  columnas.
- Dicho con otras palabras, el orden del producto  $C = AB$  se determina por el número de filas de  $A$  y el número de columnas de  $B$ :

debe ser igual

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

orden del producto

# Matrices y Determinantes

## Multiplicación de dos matrices

Por ejemplo, el producto de una matriz de  $2 \times 3$  y una matriz de  $3 \times 3$  es una matriz de  $2 \times 3$ .

$$\begin{array}{c} \text{1a. fila} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \left[ \begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{1a. fila} \end{array}$$

- La entrada  $c_{12}$  es el producto de la primera fila de  $A$  y la segunda columna de  $B$

# Matrices y Determinantes

## Multiplicación de dos matrices

Por ejemplo, el producto de una matriz de  $2 \times 3$  y una matriz de  $3 \times 3$  es una matriz de  $2 \times 3$ .

$$\begin{array}{c} \text{1a. fila} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \left[ \begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{1a. fila} \end{array}$$

- La entrada  $c_{12}$  es el producto de la primera fila de  $A$  y la segunda columna de  $B$
- $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

## Multiplicación de dos matrices

Por ejemplo, el producto de una matriz de  $2 \times 3$  y una matriz de  $3 \times 3$  es una matriz de  $2 \times 3$ .

$$\begin{array}{c} \text{1a. fila} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \left[ \begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{1a. fila} \end{array}$$

- La entrada  $c_{12}$  es el producto de la primera fila de  $A$  y la segunda columna de  $B$
- $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$
- $c_{12} = 0 * 7 + 1 * 10 + 2 * 13 = 36$

## Multiplicación de dos matrices

Resumimos el análisis anterior con una definición formal:

Si  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  entonces el **producto**  $AB$  está dado por la matriz  $C$  de  $m \times p = (c_{ij})_{m \times p}$ , donde  $c_{ij}$  es el producto de la  $i$ -ésima fila de  $A$  y la  $j$ -ésima columna de  $B$  definida por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

## Ejemplo 9: Producto

Calcule el producto  $AB$  para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

# Matrices y Determinantes

## Ejemplo 9: Producto

Calcule el producto  $AB$  para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 7 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 8 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Matriz identidad

El conjunto de todas las matrices cuadradas de un orden dado  $n$  tiene una identidad multiplicativa, esto es, hay una matriz única  $I_n$  de  $n \times n$  tal que:

$$AI_n = I_nA = A$$

## Matriz identidad

Decimos que  $I_n$  es la **matriz identidad de orden  $n$**  o, simplemente, la **matriz identidad**. Se puede demostrar que cada entrada en la diagonal principal de  $I_n$  es 1 y todas las otras entradas son 0:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

## Matriz identidad

Por ejemplo las matrices identidad de orden 2 y 3:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 10: Matriz identidad $2 \times 2$

Compruebe que  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  es la identidad multiplicativa para el conjunto de matrices  $2 \times 2$ .

## Ejemplo 10: Matriz identidad $2 \times 2$

Compruebe que  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  es la identidad multiplicativa para el conjunto de matrices  $2 \times 2$ .

Sea  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  una matriz de  $2 \times 2$ . Entonces

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

## Producto interno

- Suponga que  $A$  es un vector fila de  $1 \times n$  y  $B$  es un vector columna de  $n \times 1$ , es decir,  $A$  tiene un número de columnas igual al número de filas de la matriz fila  $B$
- Entonces el producto  $AB$  es una matriz de  $1 \times 1$  o escalar.
- También decimos que  $AB$  es el **producto interno** de las dos matrices

# Matrices y Determinantes

## Producto interno

Por ejemplo, si  $A = [4 \ 8]$  y  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$AB = [4 \ 8] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + 8 \cdot (-5) = -32$$

Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $B$  es una matriz de  $n \times p$ , entonces la matriz  $AB$  de  $m \times p$  se forma obteniendo el producto interno de cada vector fila de  $A$  con todos los vectores columna de  $B$ .