Matrices y Determinantes

José Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Introducción

Para cada matriz cuadrada A, podemos asociar un número llamado determinante de A. Por ejemplo, los determinantes de las matrices de 2×2 y 3×3 (los corchetes se sustituyen por barras verticales).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se escriben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

Determinantes

Determinante

Se dice que un determinante de una matriz de $n \times n$ es un determinante de orden n o un determinante de n-ésimo orden.

- Los determinantes del ejemplo anterior son, a su vez, determinantes de órdenes 2 y 3.
- En un análisis, el determinante de una matriz cuadrada A se representa con los símbolos *det* A o $|A|$. Usaremos el primer símbolo exclusivamente.
- Por consiguiente, si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \det A = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Determinantes

Determinante

- Aunque un determinante es un escalar, suele resultar práctico imaginarlo como un arreglo cuadrado.
- Así, por ejemplo, podemos referirnos a los determinantes de segundo y tercer orden como determinantes de 2×2 y de 3×3, respectivamente.

Determinantes

Determinante de una matriz de 2×2

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

entonces, el *det A* es:

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 1: Determinante de orden 2.

Evalúe el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1: Determinante de orden 2.

Evalúe el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3(4) = -22.$$

Determinante de orden 2

Como ayuda para memorizar la fórmula, recuerde que el determinante de una matriz de orden 2 es la diferencia de los productos de los elementos en las diagonales:

$$\begin{array}{c} \text{multiplicar} \qquad \text{multiplicar} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22} \overset{\substack{\text{restar}\\ \text{productos}\\ \downarrow}}{-} a_{12}a_{21}.$$

Determinantes

Determinante de orden 2

- Los determinantes de las matrices de orden 2 cumplen una función fundamental en la evaluación de los determinantes de las matrices de $n \times n$, donde $n > 2$.
- En general, el determinante de una matriz de $n \times n$ puede expresarse en términos de los determinantes de las matrices de $(n-1) \times (n-1)$,
- Así, por ejemplo, el determinante de una matriz de 3×3 puede expresarse en términos de los determinantes de orden 2.

Determinantes

Menor

Si a_{ij} representa la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna de una matriz cuadrada A

- el **menor** M_{ij} de a_{ij} se define como el determinante de la matriz obtenida al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Menor

- Por ejemplo para la matriz A tenemos que los menores de $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 4$ y $a_{32} = 2$ son, a su vez, los determinantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Determinantes

$$\begin{array}{r}
\text{se suprime la primera columna} \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\text{se suprime la primera fila} \rightarrow \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(3) - 5(2) = 2,
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\text{se suprime la segunda columna} \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\text{se suprime la primera fila} \rightarrow \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(1) = 1,
\end{array}$$

Determinantes

$$\text{se suprime la segunda fila} \rightarrow \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 3(1) = 0,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 3(2) = -1.$$

$$\text{se suprime la tercera fila} \rightarrow$$

Determinantes

Cofactor

- El **cofactor** A_{ij} de la entrada a_{ij} se define como el menor M_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}M_{ij}$, esto es,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

- Así, para la matriz A el menor y cofactores relacionados con la matriz del ejemplo:

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 2,$
$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1,$
$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 0,$
$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -(-1) = 1,$
y así sucesivamente.

Determinantes

Patrón del menor

- Para una matriz de 3×3, el coeficiente $(-1)^{i+j}$ del menor M_{ij} sigue el patrón
- Este patrón de signos de "tablero de damas" se extiende también a matrices de orden mayor que 3.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2: Cofactores

Para la matriz obtenga el cofactor de las entradas 0,7 y -1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Cofactores

Para la matriz obtenga el cofactor de las entradas 0,7 y -1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

- El número 0 es la entrada de la primera fila ($i = 1$) y la tercera columna ($j = 3$). Por (5), el cofactor de 0 es el determinante

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 3 = 27.$$

.

Ejemplo 2: Cofactores

Para la matriz obtenga el cofactor de las entradas 0,7 y -1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-12 - (-1)] = 11.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 0 = 7.$$

.

Teorema de desarrollo

El **determinante** *det* A de una matriz A de $n \times n$ puede evaluarse multiplicando cada entrada en cualquier fila (o columna) por su cofactor y sumando los productos resultantes.

.

Aplicación del teorema de desarrollo

Al aplicar el teorema para obtener el valor del determinante de una matriz cuadrada A se **expande** o **desarrolla** el determinante de A por una fila o por una columna dadas.

- Por ejemplo, el desarrollo del determinante de la matriz de 3×3 en la primera fila es:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 3: Desarrollo por la primera fila

Evalúe el determinante de la matriz de 3×3 desarrollando para la primera fila.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Desarrollo por la primera fila

Evalúe el determinante de la matriz de 3×3 desarrollando para la primera fila.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (-22) - 5 \cdot (-11) + 3 \cdot 0 = -77. \end{aligned}$$

.

Generalización

El teorema establece que el determinante de una matriz cuadrada A puede expandirse por cualquier fila o cualquier columna.

- Por ejemplo, el desarrollo del determinante de la matriz de 3×3, digamos, por la segunda fila, resulta en:

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Desarrollo por la tercera columna

Realice el desarrollo del determinante del ejemplo 3 por la tercera columna.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4: Desarrollo por la tercera columna

Realice el desarrollo del determinante del ejemplo 3 por la tercera columna.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 7 + (-3) \cdot 14 = -77. \end{aligned}$$

.

Notas

- En el desarrollo de un determinante, como las entradas de una fila (o columna) se multiplican por los cofactores de esa fila (o columna)
- Es lógico que si un determinante tiene una fila (o columna) con varias entradas 0, desarrollemos el determinante por esa fila (o columna).

.

Teorema: Propiedades de los determinantes

Sea A una matriz cuadrada.

1. Si toda entrada en una fila (o columna) de A es cero, entonces $det\ A = 0$.
2. Si una matriz B se forma intercambiando dos filas (o dos columnas) de A, entonces $det\ B = -det\ A$.
3. Si una matriz B se forma multiplicando cada entrada en una fila (o columna) de A por un número real k, entonces $det\ B = k det\ A$
4. Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces $det\ A = 0$.
5. Si una matriz B se forma sustituyendo cualquier fila (o columna) de A por la suma de esa fila (o columna) y k veces cualquier otra fila (o columna) de la misma A, entonces $det\ B = det\ A$.

Determinantes

Primera propiedad

Sin desarrollar se deduce inmediatamente que

$$\begin{array}{r} \\ \text{fila de ceros} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Segunda propiedad

Intercambiando la primera y la tercera columna. Se deduce del teorema que

intercambiando estas dos columnas

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\uparrow}{-}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

se obtiene un signo menos

Determinantes

Propiedad 3

Factorizando 2 de cada entrada de la primera fila, se desprende del teorema que

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{2 es un factor común de la primera fila} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} \end{array} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Propiedad 4

Dado que la primera y la segunda columnas son iguales, se deduce del teorema que

$$\begin{array}{c} \text{las columnas son iguales} \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \quad\quad\quad \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 6 \\ 7 & 7 & -5 \end{vmatrix} \end{array} = 0.$$

Ejemplo 5: Determinante de 3×3

Evalúe el determinante de A donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Utilizando la propiedad 5 obtenemos una matriz con el mismo determinante que tiene una fila (o columna) con sólo una entrada diferente de cero.
- Para evitar fracciones, es mejor usar una fila (o columna) que contenga el elemento 1 *o* -1, si es posible

Ejemplo 5: Determinante de 3×3

Evalúe el determinante de A donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Usamos primera fila para introducir ceros en la primera columna. Multiplicamos la primera fila por 2, le sumamos el resultado a la segunda y obtenemos

Ejemplo 5: Determinante de 3×3

Evalúe el determinante de A donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Usamos primera fila para introducir ceros en la primera columna. Multiplicamos la primera fila por 2, le sumamos el resultado a la segunda y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Determinantes

- Ahora multiplicamos la primera fila por -3 y sumamos el resultado a la tercera fila para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix}.$$

- Desarrollando por la primera columna encontramos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ -11 & -13 \end{vmatrix} = 19.$$

De la propiedad 5 se deduce que el valor del determinante de la matriz dada tiene el mismo valor; es decir, $det\ A = 19$.

.

Inversa de una matriz

- En álgebra, cada número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo b tal que $ab = ba = 1$ donde el número 1 es la identidad multiplicativa.
- El número b es el recíproco del número a, es decir, $a^{-1} = 1/a$.
- Una matriz A puede tener un inverso multiplicativo, pero como veremos en la explicación que sigue, A debe ser de un cierto tipo de matriz cuadrada.

Inversa de una matriz

.

Inverso multiplicativo

- Si A es una matriz de $n \times n$ y existe una matriz B de $n \times n$ tal que
$$AB = BA = I_n$$
decimos que B es el inverso multiplicativo o, simplemente, el inverso de A.
- El inverso multiplicativo de A se escribe $B = A^{-1}$.

Inversa de una matriz

.

Inverso multiplicativo

- A diferencia de lo que ocurre en los números reales, nótese que el símbolo A^{-1} no denota el recíproco de A, esto es, A^{-1} no es $1/A$. En la teoría de matrices $1/A$ no está definido.
- Se dice que una matriz cuadrada que tiene un inverso multiplicativo es no singular o invertible.
- Cuando una matriz cuadrada A no tiene inverso, se dice que es singular o no invertible.

Ejemplo 6: Inverso de una matriz

Determine si B es la matriz inversa de A

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

Ejemplo 6: Inverso de una matriz

Determine si B es la matriz inversa de A

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

- entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $AB = BA = I_2$, concluimos que la matriz A es no singular y que el inverso A^{-1} de la matriz A es la matriz B dada.

Determinación del inverso A^{-1}: Método 1

- Podemos encontrar el inverso de una matriz no singular por medio de dos métodos. El primero que consideraremos usa determinantes.
- Empezamos con el caso especial donde A es una matriz de 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Inversa de una matriz

- Para que una matriz de 2×2

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- sea el inverso de A, debemos tener

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inversa de una matriz

- Por la multiplicación y la igualdad de matrices, encontramos que b_{11} y b_{21} deben satisfacer el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0, \end{cases}$$

- mientras que b_{12} y b_{22} deben satisfacer

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1. \end{cases}$$

Inversa de una matriz

- Resolviendo estos dos sistemas de ecuaciones, obtenemos

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$
$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad b_{12} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

- Una inspección de las expresiones revela que el denominador de cada fracción es el valor del determinante de la matriz A, es decir

$$det \ A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Inversa de una matriz

Teorema: Inversa de una matriz de 2×2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Si $det\ A \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de la matriz A está dado por:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz

Teorema: Inversa de una matriz de $n \times n$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si $det\ A \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de la matriz A está dado por:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

donde A_{ij} es el cofactor de la entrada a_{ij} en A

Ejemplo 7: Inversa de una matriz de 3×3

- Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz

Ejemplo 7: Inversa de una matriz de 3×3

- Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

- Ahora, para cada entrada de A el correspondiente cofactor es:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -26, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Inversa de una matriz

Ejemplo 7: Inversa de una matriz de 3×3

- El determinante de A es $det\ A = -86$.
- La inversa de A es $-\frac{1}{86}$ veces la matriz adjunta de A:

$$A^{-1} = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} -18 & 4 & -15 \\ -12 & -26 & -10 \\ -16 & -6 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{86}\overbrace{\begin{bmatrix} -18 & -12 & -16 \\ 4 & -26 & -6 \\ -15 & -10 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{esta adj } A} = \begin{bmatrix} \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{43} & \frac{6}{43} & \frac{8}{43} \\ -\frac{2}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43} \\ \frac{15}{86} & \frac{5}{43} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix}.$$

Inversa de una matriz

Determinación del inverso A^{-1}: Método 2

Para cualquier matriz A, las operaciones elementales entre filas en A se definen como las tres transformaciones siguientes:.

- Intercambiar cualquier par de filas.
- Multiplicar cualquier fila por una constante k diferente de cero.
- Sumar un múltiplo constante diferente de cero de una fila a otra.

Determinación del inverso A^{-1}: Método 2

Semejante a la notación que usamos para representar operaciones en ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales, empleamos las abreviaturas siguientes. El símbolo R representa la palabra fila.

- $R_i \leftrightarrow R_j$: intercambio de la i-ésima con la fila j-ésima.
- kR_i: multiplique la fila i por k.
- $kR_i + R_j$: multiplique la fila i-ésima por k y sume el resultado a la fila j-ésima.

Inversa de una matriz

Determinación del inverso A^{-1}: Método 2

La secuencia de operaciones elementales entre filas que transforman una matriz A de $n \times n$ en la identidad multiplicativa I_n es la misma secuencia que transforma I_n en A^{-1}.

Inversa de una matriz

- Formar una matriz de $n \times 2n$, A a la izquierda de una barra vertical e I_n a la derecha.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Inversa de una matriz

- Formar una matriz de $n \times 2n$, A a la izquierda de una barra vertical e I_n a la derecha.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

- Aplicamos operaciones entre filas en hasta que la transformemos en la matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right],$$

Inversa de una matriz

- Formar una matriz de $n \times 2n$, A a la izquierda de una barra vertical e I_n a la derecha.
- Aplicamos operaciones entre filas en hasta que la transformemos en la matriz:
- La matriz a la izquierda de la barra vertical es ahora I_n. La inversa de A es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right],$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8: Uso de operaciones elementales entre filas

Use operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Formar la matriz 2×4

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inversa de una matriz

Ejemplo 8: Uso de operaciones elementales entre filas

Use operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Formar la matriz 2×4

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-6R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right].$$