

Polinomios

Jose Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

Abril 2022

- Un **polinomio** es una expresión algebraica que constituye la suma o la resta ordenadas de un número finito de términos o monomios.

Funciones polinomiales

- Ya conocemos las funciones como: $y = 3$, $y = 2x - 1$, $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$.
- Esas funciones, en las que la variable x está elevada a una potencia entera no negativa, son ejemplos de funciones polinomiales.

- Formalmente una función polinomial $y = f(x)$ es una función que tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

donde los coeficientes $a_n x^n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son constantes reales y n es un entero no negativo.

Dominio

El dominio de toda función polinomial f es el conjunto de todos los números reales:

$$(-\infty, \infty)$$

Funciones polinomiales

Las funciones polinomiales se clasifican por su grado. La mayor potencia de x de un polinomio se llama grado. Entonces, si $a_n \neq 0$ se dice que **grado n-ésimo**. Por ejemplo la siguiente función es un polinomio de grado 3.

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 3x + 8$$

A continuación tenemos las ecuaciones de los polinomios de grados 0 a 3.

- $f(x) = a_0$ **Función constante**
- $f(x) = a_1x + a_0$ **Función lineal**
- $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ **Función cuadrática**
- $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ **Función cubica**

Función potencia

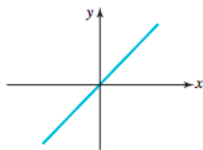
- Un caso especial de la función potencia es la función polinomial de un solo término o **monomial**

$$f(x) = x^n \quad (2)$$

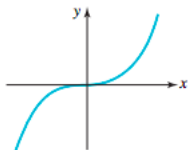
Funciones polinomiales

Función potencia

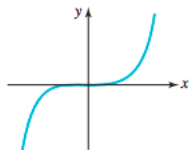
- Las gráficas de para la Ecuación 2 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se muestra en las siguientes figuras.



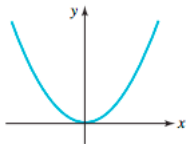
a) $n = 1, f(x) = x$



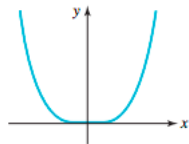
b) $n = 3, f(x) = x^3$



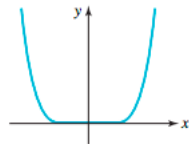
c) $n = 5, f(x) = x^5$



d) $n = 2, f(x) = x^2$

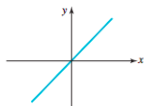


e) $n = 4, f(x) = x^4$

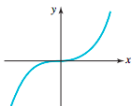


f) $n = 6, f(x) = x^6$

Función polinomial



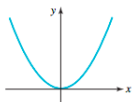
a) $n = 1, f(x) = x$



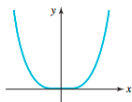
b) $n = 3, f(x) = x^3$



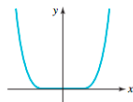
c) $n = 5, f(x) = x^5$



d) $n = 2, f(x) = x^2$



e) $n = 4, f(x) = x^4$



f) $n = 6, f(x) = x^6$

- las gráficas con n impar son básicamente iguales
 - las gráficas son simétricas respecto al origen
 - se aplanan cada vez más cerca del origen a medida que aumenta el grado
- Una observación parecida es válida en el caso de las gráficas de n par, excepto, que las gráficas son simétricas respecto al eje y

Gráficas desplazadas

En funciones de la forma:

$$y = ax^n + c, y = ax^n - c$$

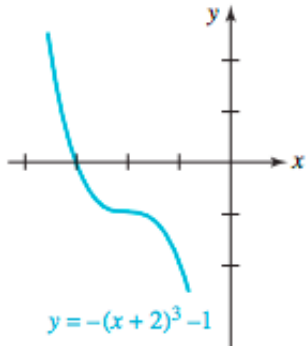
$$y = a(x + c)^n, y = a(x - c)^n$$

- Para $c > 0$, las gráficas se pueden obtener con desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica

Funciones polinomiales

Gráficas desplazadas

La gráfica de $y = -(x + 2)^3 - 1$ es la de $f(x) = x^3$ reflejada en el eje x , desplaza dos unidades hacia la izquierda y después desplazada verticalmente 1 unidad hacia abajo.



Teorema comportamiento de los extremos

Cuando $x \rightarrow -\infty$ y $x \rightarrow \infty$, la gráfica de la función polinomial

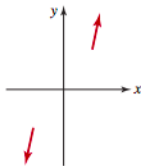
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,
se asemeja a la gráfica de $f(x) = a_n x^n$

Función polinomial

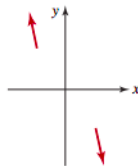
Resumen gráfico del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n entero positivo impar

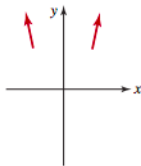


a) $a_n > 0$



b) $a_n < 0$

n entero positivo par



c) $a_n > 0$



d) $a_n < 0$

El comportamiento en los extremos de un polinomio f depende de su grado n y del signo de su primer coeficiente, a_n

Simetría

Es fácil indicar, por inspección, las funciones polinomiales cuyas gráficas tienen simetría con respecto al eje y o al origen.

- Una función par es aquella en la cual $f(-x) = f(x)$
- Una función impar es en la que $f(-x) = -f(x)$

Las dos condiciones son válidas para las funciones polinomiales en las que todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente.

Funciones polinomiales

potencias pares

$$f(x) = 5x^4 - 7x^2$$

función par

potencias impares

$$f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x$$

función impar

potencias diversas

$$f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2$$

ni par ni impar

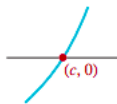
Simetría

- una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es par, porque las potencias obvias son enteros pares; el término constante 6 es, en realidad, $6x^0$ y 0 es entero par no negativo.

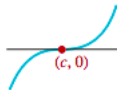
Intersecciones

Toda función polinomial f cruza el eje y , porque $x = 0$ está en el dominio de la función. Si $f(x) = (x - c)^m q(x)$ donde $q(x)$ es otro polinomio entonces:

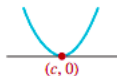
- si c es una **raíz simple**, la gráfica de f atraviesa directamente el eje x en $(c, 0)$.
- si c es una **raíz de multiplicidad impar** $m = 3, 5, \dots$, la gráfica de f atraviesa el eje x , pero esta aplanaada en $(c, 0)$.
- si c es una **raíz de multiplicidad par** $m = 2, 4, \dots$, la gráfica de f es tangente al eje x , o lo toca, en $(c, 0)$.



a) Raíz simple



b) Raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \dots$



c) Raíz de multiplicidad par $m = 2, 4, \dots$

Intersecciones

- En el caso en que c sea una raíz simple, o una raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \dots$, $f(x)$ cambia de signo en $(c, 0)$.
- Si c es una raíz de multiplicidad par, $m = 2, 4, \dots$, $f(x)$ no cambia de signo en $(c, 0)$.
- Observe que, dependiendo del signo del primer coeficiente de la función polinomial, las gráficas se podrían reflejar en el eje x .

Ejemplo 1

Graficar $f(x) = x^3 - 9x$

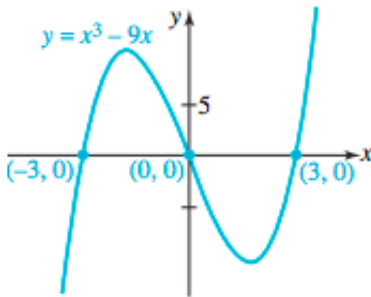
- Tomando en cuenta solo el primero, tenemos que f será similar a x^3 para $|x|$ grande.
- $f(x)$ decrece cuando $x \rightarrow \infty$ y crece cuando $x \rightarrow -\infty$
- Como todas las potencias son enteros impares, f es una función impar (simétrica con respecto al origen).
- Podemos factorizar $f(x) = x(x + 3)(x - 3)$, sus intersecciones estarán en $c \in \{0, 3, -3\}$

Funciones polinomiales

Ejemplo 1

Graficar $f(x) = x^3 - 9x$

- De izquierda a derecha la gráfica sube (f es creciente) y cruza el eje de las x en -3 .
- En algún punto del segundo cuadrante la gráfica desciende hasta volver a cruzar el eje x en 0
- Como la gráfica es simétrica con respecto al origen, su comportamiento es exactamente el contrario en los cuadrantes primero y cuarto.



Ejemplo 2

Graficar $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$

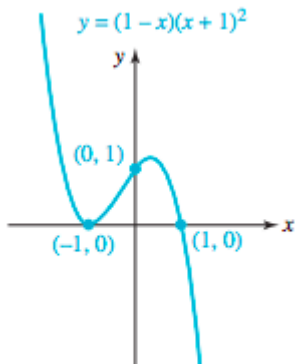
$$f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$$

- La gráfica de f será similar la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo contrario del comportamiento en los extremos de la función del ejemplo anterior.
- como hay potencias pares e impares de x , se tiene que f no es par ni impar; su gráfica no es simétrica respecto al eje y o al origen.
- La intersección con el eje y está en el punto $(0, 1)$ y las intersecciones con el eje x ocurren en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Ejemplo 2

Graficar $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$

- De izquierda a derecha la gráfica f es decreciente, como -1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$.
- Después de $(-1, 0)$ sube y cruza el eje y en $(0, 1)$.
- En algún punto del intervalo $[-1, 1]$ la gráfica comienza a decrecer hasta llegar a 1 , como 1 es una raíz simple atraviesa el eje x .



Ejemplo 3

Graficar $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

- Como se trata de un binomio cuadrado perfecto $f(x) = (x^2 - 2)^2$.
- Dado que $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, podemos reescribir como:

$$f(x) = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2$$

Ejemplo 3

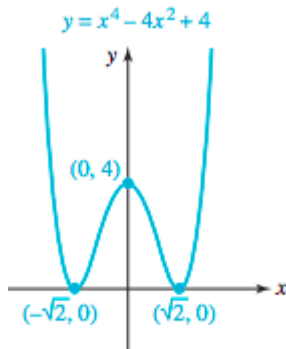
Graficar $f(x) = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2$

- La gráfica para $f(x)$ será similar a la de $y = x^4$ cuando $|x|$ grandes. La función crece cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$
- Como $f(x)$ sólo contiene potencias pares de x , es una función par, por tanto será simétrica con respecto al eje y .
- Como $f(0) = 4$, la intersección con el eje y está en $(0, 4)$. Mientras que las intersecciones con el eje x están en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.

Ejemplo 3

Graficar $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$

- De izquierda a derecha, la gráfica baja desde el segundo cuadrante y entonces, como $-\sqrt{2}$ es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica toca al eje x
- Después, la gráfica sube desde aquí hasta la intersección con el eje y en $(0, 4)$
- Podemos usar la la simetría respecto al eje y para completar la gráfica en el primer cuadrante.



Ejemplo 4

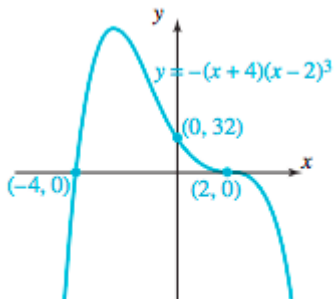
Graficar $f(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$

- Por inspección de f la gráfica será similar a $y = -x^4$ para valores grandes de $|x|$.
- La función f no es par ni impar. Se demuestra, en forma directa, que $f(-x) \neq f(x)$, y que $f(-x) \neq -f(x)$.
- Como $f(0) = (-4)(-2)^3 = 32$ el cruce con el eje y está en $(0,32)$. De la forma factorizada de $f(x)$, tenemos que los cruces con el eje x están en $(-4,0)$ y $(2,0)$.

Funciones polinomiales

Ejemplo 4

- De izquierda a derecha, la f crece desde el tercer cuadrante, como -4 es una raíz simple, $f(x)$ cruza el eje x en $(-4, 0)$
- En algún lugar del intervalo $[4, 0]$, la f comienza a decrecer, para interceptar el eje y en $(0, 32)$.
- Después, la función continúa decreciendo, pero como 2 es una raíz de orden tres, la gráfica se aplana al pasar por $(2, 0)$ y desciende al cuarto cuadrante.



Ejemplo 5

Graficar $f(x) = -(x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^3$

- La función f es de grado 6, por lo que su comportamiento en los extremos se parece a la gráfica de $y=x^6$.
- También, la función f ni es par ni es impar; su gráfica no tiene simetría respecto al eje y ni al origen.
- La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -24)$
De acuerdo con los factores de f las intersecciones con el eje x de la gráfica están en $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$.

Funciones polinomiales

División de polinomios

Ahora veremos como podemos dividir dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$. La división de una función polinómica $f(x)$ por un polinomio lineal $g(x) = x - c$ es especialmente útil, porque nos proporciona una forma de evaluar la función f en el número c sin tener que calcular las potencias de c .

Funciones polinomiales

Si $p > 0$ y $s > 0$ son enteros tales que $p \geq s$, entonces p/s se llama fracción **impropia**. Si se divide p entre s se obtienen números únicos, q y r , que satisfacen:

$$\frac{p}{q} = q + \frac{r}{s} \text{ o } p = sq + r$$

doce $0 \leq p < s$. El número p se llama dividendo, s divisor, q es el cociente y r es el residuo. Al hacer la división aritmética se tiene:

$$\begin{array}{r} 45 \quad \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow 23 \overline{)1052} \quad \leftarrow \text{dividendo} \\ \underline{92} \quad \leftarrow \text{se resta} \\ 132 \\ \underline{115} \\ 17. \quad \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$1052 = 23 \cdot 45 + 17.$$

↑
divisor

cociente residuo
↓ ↓

División de polinomios

El método para dividir dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$ se parece a la división de enteros positivos. Si el grado de un polinomio $f(x)$ es mayor o igual que el grado de $g(x)$, entonces $f(x)/g(x)$ se llama también fracción impropia.

Teorema (Algoritmo de la división)

Sean $f(x)$ y $g(x) \neq 0$ polinomios, donde el grado de $f(x)$ es mayor o igual que el de $g(x)$. Entonces existen polinomios únicos, $q(x)$ y $r(x)$ tales que: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ o $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

División de polinomios

Ejemplo 4

Usar la división para calcular el cociente de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ entre $g(x) = x^2 + 1$

Solución:

$$\begin{array}{r} \text{divisor} \rightarrow x^2 + 1 \overline{) 3x^3 - x^2 - 2x + 6} \\ \underline{3x^3 + 0x^2 + 3x} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-x^2 + 0x - 1} \\ -5x + 7 \end{array}$$

← cociente
← dividendo
← se resta
← residuo

Ejemplo 4

Usar la división para calcular el cociente de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ entre $g(x) = x^2 + 1$

El resultado se puede escribir como:

- $\frac{3x^3 - x^2 - 2x + 6}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{-5x + 7}{x^2 + 1}$
- $3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + 1)(3x - 1) + (5x + 7)$

Teorema del residuo

Si el divisor $g(x)$ es un polinomio lineal $x - c$, entonces, de acuerdo con el algoritmo de división, el grado del residuo r es 0; esto es una constante. Entonces tenemos que:

$$f(x) = (x - c)q(x) + r$$

Si evaluamos $f(x)$ en $x = c$, se tiene:

$$f(c) = (c - c)q(c) + r = r$$

División de polinomios

Teorema del residuo

Al resultado anterior se le denomina teorema del residuo

Teorema

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre un polinomio lineal $x = c$, el residuo r es el valor de $f(x)$ en $x = c$; esto es, $f(c) = r$.

Ejemplo 5

Usar el teorema del residuo para calcular r cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide entre $x - 2$

Solución: Según el teorema del residuo, el residuo r es el valor de la función evaluada en $x = 2$.

$$r = 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32$$

Ejemplo 5

Aplicar el teorema del residuo para determinar cuando $f(c) = x^5 - 4x^3 - 2x - 10$ cuando $c = -3$

Solución:

$$f(-3) = (-3)^5 - 4(-3)^3 + 2(-3) - 10 = -151$$

División de polinomios

Ejemplo 5

Aplicar el teorema del residuo para determinar cuando $f(c) = x^5 - 4x^3 - 2x - 10$ cuando $c = -3$

Solución: Utilizando la división tenemos que $x - c$ es decir $x - (-3) = x + 3$.

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 47 \\ x + 3 \overline{) x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10} \\ \underline{x^5 + 3x^4} \\ -3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\ \underline{-3x^4 - 9x^3} \\ 5x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\ \underline{5x^3 + 15x^2} \\ -15x^2 + 2x - 10 \\ \underline{-15x^2 - 45x} \\ 47x - 10 \\ \underline{47x + 141} \\ -151 \end{array}$$

División sintética

La división sintética es un método abreviado para dividir un polinomio $f(x)$ entre un polinomio lineal $x - c$

- o se requiere escribir las diversas potencias de la variable x
- solo se incluyen coeficientes potencias en $f(x)$ (se deben incluir los coeficientes 0).
- en el proceso solo se utilizan operaciones aritméticas

División sintética

Suprimiendo las variables y los términos repetidos.

División larga

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x + 7 \\ x - 2 \overline{) 4x^3 - 11x^2 + 13x - 5} \\ \underline{(-) 4x^3 - 8x^2} \\ 3x^2 + 13x - 5 \\ \underline{(-) 3x^2 + 6x} \\ 7x - 5 \\ \underline{(-) 7x - 14} \\ 9 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \rightarrow -2 \overline{) 4 \quad -11 \quad 13 \quad -5} \\ \underline{(-) \quad -8} \\ \phantom{(-) \quad -} 3 \\ \underline{(-) \quad 6} \\ \phantom{(-) \quad -} 7 \\ \underline{(-) \quad -14} \\ \phantom{(-) \quad -} 9 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

División sintética

Compactando en dirección de las flechas.

$$\begin{array}{r} x - 2 \rightarrow -2 \overline{) \begin{array}{cccc} \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\ (-) & -8 & & \\ \hline & \textcircled{-3} & & \\ (-) & & 6 & \\ \hline & & \textcircled{7} & \\ (-) & & & -14 \\ \hline & & & \textcircled{9} \leftarrow \text{residuo} \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \overline{) \begin{array}{cccc} \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\ (-) & -8 & 6 & -14 \\ \hline & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} \leftarrow \text{residuo} \end{array}} \end{array}$$

División sintética

Bajando el coeficiente principal como indica la flecha

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\ & (-) & -8 & 6 & -14 \\ \hline & & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 4 & -11 & 13 & -5 \\ & (-) & -8 & 6 & -14 \\ \hline & 4 & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} = r \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{primera fila} \\ \leftarrow \text{segunda fila} \\ \leftarrow \text{tercera fila} \end{array}$$

División sintética

- Cada número en la segunda fila se puede obtener si se multiplica el número en la tercera fila de la columna precedente por el divisor.
- cada número de la tercera fila se obtiene restando el número de la segunda fila del número correspondiente en la primera fila.
- para evitar la resta, se multiplica por el inverso aditivo y sumamos la segunda fila a la primera.

coeficientes del dividendo $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 13x - 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{divisor: } x - 2 & 4 & -11 & 13 & -5 \\ & & 8 & -6 & 14 \\ \hline & 4 & -3 & 7 & 9 = r \end{array}$$

← primera fila
← segunda fila
← tercera fila

coeficientes del cociente $q(x) = 4x^2 - 3x + 7$

GUÍA PARA LA DIVISIÓN SINTÉTICA

- i) Escriba c seguido por los coeficientes de $f(x)$. Asegúrese de incluir los coeficientes que son 0 y el término constante.
- ii) Baje el coeficiente principal de $f(x)$ a la tercera fila.
- iii) Multiplique este número por c y escriba el producto directamente debajo del segundo coeficiente de $f(x)$. Luego sume los dos números de esta columna y escriba la suma debajo de ellos en la tercera fila.
- iv) Multiplique esta suma por c y escriba el producto en la segunda fila de la siguiente columna. Luego sume los dos números de esta columna y escriba la suma debajo de ellos en la tercera fila.
- v) Repita el paso anterior tantas veces como sea posible.
- vi) El último número de la tercera fila es el residuo constante r ; los números precedentes de la tercera fila son los coeficientes de $q(x)$, el polinomio cociente de grado $n - 1$.

Use la división larga para determinar el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x)$ se divide entre el polinomio $g(x)$. Expresé el resultado de la forma $f(x)g(x)q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = 8x^2 + 4x - 7$; $g(x) = x^2$

2. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$; $g(x) = (x + 2)^2$

Use el teorema del residuo para determinar r cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio $g(x)$.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$; $g(x) = x - 2$

2. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 5$; $g(x) = x - 3$

Aplice la división sintética para calcular el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando se divide $f(x)$ entre $g(x)$

1. $f(x) = 2x^2 - x + 5$; $g(x) = x - 2$

2. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4$; $g(x) = x + 4$

Use la división sintética para calcular el valor de $f(x)$ para la x dada:

1. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19$ para $x = 1$

2. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 27$ para $x = \frac{1}{2}$