Polinomios

Jose Ortiz Bejar

Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH

13 de mayo de 2022

Raíces y factores de funciones polinomiales

- Recordemos que una raíz (o cero) de una función polinomial f es un número c para el cual $f(c) = 0$ Una raíz de una función f puede ser un número real o uno complejo. Recordemos que **número complejo**
  - $z = a + bi \ en \ el \ que \ i^2 = -1$
  - a y b son números reales
  - El símbolo i se llama **unidad imaginaria** ($i = \sqrt{-1}$).
  - $\bar{z} = a - bi$ es el **conjugado** de z.

- **En esta sección exploraremos la relación entre las raíces de una función polinomial $f(x)$, y los factores de f.**

Ejemplo 1: Raíz real

Se tiene la función polinomial $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ el numero real $\frac{1}{2}$ es una raíz de la función, ya que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$2\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{9}{4} + 3 - 1$$

$$\frac{1}{4} - \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = 0$$

Ejemplo 2: Raíz compleja

Para la función polinomial $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ el número complejo $1 + i$ es una de sus raíces.
Para comprobarlo debemos primero desarrollar el desarrollo del binomio: $(1 + i)^3$

- Recuerde que $i^2 = -1$ y $i^3 = -i$

Ejemplo 2: Raíz compleja

$$
\begin{aligned}
f(1+i) &= (1+i)^3 - 5(1+i)^2 + 8(1+i) - 6 \\
&= (1^3 + 3(1)^2 i + 3(1)i^2 + i^3) - 5(1^2 + 2i + i^2) + 8(1+i) - 6 \\
&= (-2+2i) - 5(2i) + (2+8i) \\
&= (-2+2) + (10-10)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Teorema del residuo

Ahora ya podemos relacionar la noción de una raíz de una función polinomial f con la división de polinomios. De acuerdo con el teorema del residuo, cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal $x - c$ el residuo es $r = f(c)$. Si c es una raíz de f entonces $f(c) = 0$ implica que $r = 0$.

Teorema del factor

Así, si c es una raíz de una función polinomial f, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Por tanto si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces f tiene la forma de la ecuación 1. En tal caso, se puede apreciar directamente que $f(c) = (c - c)q(c) = 0$.

$$f(x) = (x - c)q(x) \tag{1}$$

Este resultado se resumen en el siguiente teorema del factor.

Teorema

Un número c es raíz de una función polinomial f si, y solo sí, $x - c$ es un factor de $f(x)$

Ejemplo 3: Factores de un polinomio

Determinar si

a) $x + 1$ es factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$

b) $x - 2$ es factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

Ejemplo 3: Factores de un polinomio

Determinar si

a) $x + 1$ es factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$

b) $x - 2$ es factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

Solución

a) De la división

$$\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 1 & 0 & -5 & 6 & -1 \\
 & & -1 & 1 & 4 & -10 \\
\hline
 & 1 & -1 & -4 & 10 & \boxed{-11 = r = f(-1)}
\end{array}$$

Como $f(-1) = -11$, la conclusión es que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 3: Factores de un polinomio

- Se tiene que $f(2) = 0$. Eso quiere decir que 2 es una raíz y que $x - 2$ es un factor $f(x)$.
- En la división se observa también que el cociente es $q(x) = x^2 - x - 2$ y por consiguiente $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$.

b) De la división

$$
\begin{array}{c|rrrl}
2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
  &   & 2 & -2 & -4 \\
\hline
  & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = r = f(2)}
\end{array}
$$

Teorema de la factorización completa

Teorema

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las n raíces (no necesariamente distintas) de una función polinomial de grado $n > 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Entonces $f(x)$ se puede escribir como un producto de n factores lineales

$$f(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n) \tag{2}$$

Teorema fundamental del álgebra

Teorema

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando menos una raíz.

Ejemplo 4: Determinar la factorización completa

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$$

Ejemplo 4: Determinar la factorización completa

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$$

Sabemos que $x - 1$ es un factor de $f(x)$; entonces, con la división

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -12 & 47 & -62 & 26 \\ & & 1 & -11 & 36 & -26 \\ \hline & 1 & -11 & 36 & -26 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

tenemos que:

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 11x^2 + 36x - 26)$$

Ejemplo 4: Determinar la factorización

Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad dos, $x - 1$ debe ser también factor del cociente

$$q(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 26$$

Ejemplo 4: Determinar la factorización

Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad dos, $x - 1$ debe ser también factor del cociente

$$q(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 26$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -11 & 36 & -26 \\
  &   & 1 & -10 & 26 \\
\hline
  & 1 & -10 & 26 & \boxed{0 = r}
\end{array}$$

Ejemplo 4: Determinar la factorización completa

El nuevo cociente $q(x)$ se puede expresar como:

$$q(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 26)$$

y tenemos que:

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 - 10x - 26)$$

Ejemplo 4: Determinar la factorización completa

Las dos raíces que restan se determinan resolviendo $x^2 - 10x + 26 = 0$ con la fórmula cuadrática obteneos que son los números complejos $5 + i$ y $5 - i$. como primero coeficiente es $a_4 = 1$, la factorización completa quedaría como:

$$f(x) = (x - 1)^2(x - (5 + i))(x - (5 - i))$$

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

Encontrar una función polinomial f de grado tres cuyas raíces sean 1, -4 y 5, tal que su gráfica tenga el cruce con el eje de las ordenadas en $(0, 5)$.

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

Encontrar una función polinomial f de grado tres cuyas raíces sean 1, -4 y 5, tal que su gráfica tenga el cruce con el eje de las ordenadas en $(0, 5)$.

Como los números $1, -4$ y 5 son raíces de $f(x)$. Tenemos que $(x-1)$, $(x+4)$ y $(x-5)$ son factores de f. Sin embargo, la función polinomial que busca no es:

$$f(x) = (x-1)(x+4)(x-5)$$

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

- La razón es que todo múltiplo constante distinto de cero de f es un polinomio diferente con las mismas raíces.

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

- La razón es que todo múltiplo constante distinto de cero de f es un polinomio diferente con las mismas raíces.
- También observe que la función da como resultado $f(0) = 20$

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

- La razón es que todo múltiplo constante distinto de cero de f es un polinomio diferente con las mismas raíces.
- También observe que la función da como resultado $f(0) = 20$
- Dado que se requiere que $f(0) = 5$. La solución debe tener la forma:

$$f(x) = a_3(x-1)(x+4)(x-5)$$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

- Donde a_3 es una constante real. Por tanto debemos resolver $a_3 f(x)$ cuando $x = 0$:

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

- Donde a_3 es una constante real. Por tanto debemos resolver $a_3 f(x)$ cuando $x = 0$:

$$f(0) = a_3(0-1)(0+4)(0-5) = 20a_3 = 5$$

y entonces $a_3 = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 5:Factorización lineal completa

- Donde a_3 es una constante real. Por tanto debemos resolver $a_3 f(x)$ cuando $x = 0$:

$$f(0) = a_3(0-1)(0+4)(0-5) = 20a_3 = 5$$

y entonces $a_3 = \frac{1}{4}$.

- La función que se busca sería:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x+4)(x-5)$$

Teorema (Raíces complejas)

Sea $f(x)$ una función polinomial de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado $\overline{z}$ también es una raíz de $f(x)$.

Raíces reales de funciones polinomiales

Raíces reales

Si una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene m raíces reales $c_1, c_2..., c_m$ (no necesariamente diferentes) entonces, por el teorema del factor, cada uno de los polinomios lineales $(x - c_1), (x - c_2), \ldots, (x - c_m)$ son factores de $f(x)$. Esto es,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)...(x - c_m)q(x),$$

en donde sí $q(x)$ es un polinomio. Entonces $n \geq m$.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Cantidad de raíces reales

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene a lo más n raíces reales (no necesariamente distintas).

Teorema (Cantidad de raíces racionales)

Sea p/s un número racional en sus términos más simples, y además una raíz de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

en donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son enteros y $a_n \neq 0$. Entonces p es un factor entero del termino constante a_0 y s es un factor entero del primer coeficiente a_n

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

- Se identifican el término constante $a_0 = -2$ y el primer coeficiente $a_4 = 3$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

- Se identifican el término constante $a_0 = -2$ y el primer coeficiente $a_4 = 3$
- a continuación se hace una lista de todos los factores enteros de a_0 y a_4

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

- Se identifican el término constante $a_0 = -2$ y el primer coeficiente $a_4 = 3$
- a continuación se hace una lista de todos los factores enteros de a_0 y a_4
- $p : \pm 1 \pm 2$ y $s : \pm 1, \pm 3$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

- Ahora se forma una lista de todas las raíces racionales posibles p/s, dividiendo todos los factores de p entre s.

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

- Ahora se forma una lista de todas las raíces racionales posibles p/s, dividiendo todos los factores de p entre s.

$$\frac{p}{s} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\}$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

- Sabemos que la función polinomial f es de cuarto grado y tiene cuatro raíces

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

- Sabemos que la función polinomial f es de cuarto grado y tiene cuatro raíces
- si alguno de ellos es un número real y es racional, debe estar en la lista p/s.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

- Sabemos que la función polinomial f es de cuarto grado y tiene cuatro raíces
- si alguno de ellos es un número real y es racional, debe estar en la lista p/s.
- Para determinar cuál de los números son raíces, si es que las hay,

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 6: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

- Sabemos que la función polinomial f es de cuarto grado y tiene cuatro raíces
- si alguno de ellos es un número real y es racional, debe estar en la lista p/s.
- Para determinar cuál de los números son raíces, si es que las hay,
  - podríamos hacer una sustitución directa en $f(x)$. Sin embargo, la división sintética suele ser un método más eficiente para evaluar $f(x)$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comenzando con $x = 1$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comenzando con $x = 1$

- tenemos que el residuo cero. Lo que indica que $r = f(-1) = 0$ y por tanto -1 es una raíz de f.

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comenzando con $x = 1$

- tenemos que el residuo cero. Lo que indica que $r = f(-1) = 0$ y por tanto -1 es una raíz de f.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\
 & & -3 & 13 & -10 & 2 \\
\hline
 & 3 & -13 & 10 & -2 & \boxed{0 = r}.
\end{array}
$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comenzando con $x = 1$

- tenemos que el residuo cero. Lo que indica que $r = f(-1) = 0$ y por tanto -1 es una raíz de f.
- Por por consiguiente $(x - (-1)) = (x + 1)$ es un factor de f y usando el cociente $f(x) = (x + 1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2)$.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\
 & & -3 & 13 & -10 & 2 \\
\hline
 & 3 & -13 & 10 & -2 & \boxed{0 = r}.
\end{array}
$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Para comprobar que 1 no es una raíz repetida debemos dividir el cociente nuevamente entre 1

$f(x) = (x+1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2)$

- El residuo es $r = -2$ indica que 1 no es una raíz repetida de f.

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
1 & 3 & -13 & 10 & -2 & \leftarrow \text{coeficientes del cociente} \\
 & & 3 & -10 & 0 & \\
\hline
 & 3 & -10 & 0 & \boxed{-2 = r} &
\end{array}
$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comprobemos ahora si $\frac{1}{3}$ es una raíz del cociente y por tanto una raíz de f.

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comprobemos ahora si $\frac{1}{3}$ es una raíz del cociente y por tanto una raíz de f.

- Como el residuo es 0, entonces

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & \boxed{0 = r.} \end{array}$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comprobemos ahora si $\frac{1}{3}$ es una raíz del cociente y por tanto una raíz de f.

- Como el residuo es 0, entonces $\frac{1}{3}$ es una raíz y $(x - \frac{1}{3})$ es un factor de f.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\
 & & 1 & -4 & 2 \\
\hline
 & 3 & -12 & 6 & \boxed{0 = r.}
\end{array}
$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Comprobemos ahora si $\frac{1}{3}$ es una raíz del cociente y por tanto una raíz de f.

- Como el residuo es 0, entonces $\frac{1}{3}$ es una raíz y $(x - \frac{1}{3})$ es un factor de f.
- el cociente es $3x^2 - 12x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & \boxed{0 = r.} \end{array}$$

Ejemplo 6: Raíces racionales

Como el cociente $3x^2-12x+6$ ya es de grado dos, utilzando la fórmula cuadrática tenemos:

Ejemplo 6: Raíces racionales

Como el cociente $3x^2 - 12x + 6$ ya es de grado dos, utilzando la fórmula cuadrática tenemos:

- que $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$ son raíces de f.

Ejemplo 6: Raíces racionales

Como el cociente $3x^2 - 12x + 6$ ya es de grado dos, utilzando la fórmula cuadrática tenemos:

- que $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$ son raíces de f.
- Por consiguiente, el polinomio f tiene

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 6: Raíces racionales

Como el cociente $3x^2 - 12x + 6$ ya es de grado dos, utilzando la fórmula cuadrática tenemos:

- que $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$ son raíces de f.
- Por consiguiente, el polinomio f tiene
  - dos raíces racionales en -1 y $\frac{1}{3}$

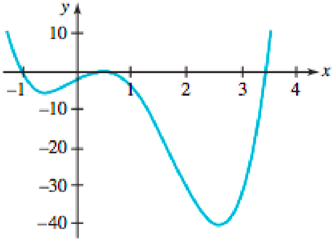
Ejemplo 6: Raíces racionales

Como el cociente $3x^2 - 12x + 6$ ya es de grado dos, utilzando la fórmula cuadrática tenemos:

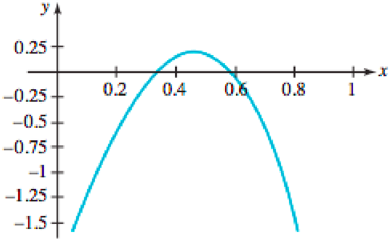
- que $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$ son raíces de f.
- Por consiguiente, el polinomio f tiene
  - dos raíces racionales en -1 y $\frac{1}{3}$
  - dos raíces irracionales en $2 + \sqrt{2}\ y\ 2 - \sqrt{2}$

Ejemplo 6: Raíces racionales

A continuación mostramos la gráfica de la función
$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$



a) Gráfica de *f* en el intervalo [−1, 4]



b) Acercamiento de la gráfica, en el intervalo [0, 1]

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- En este caso, el término constante es $a_0 = 4$ y el primer coeficiente es $a_4 = 1$.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- En este caso, el término constante es $a_0 = 4$ y el primer coeficiente es $a_4 = 1$.
- Los factores enteros de a_0 y a_4 son: $p : \pm 1, \pm 2, \pm 4$ y $s : \pm 1$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- En este caso, el término constante es $a_0 = 4$ y el primer coeficiente es $a_4 = 1$.
- Los factores enteros de a_0 y a_4 son: $p : \pm 1, \pm 2, \pm 4$ y $s : \pm 1$
- La lista de posibles raíces estará dada por $\frac{p}{s} : \pm 1, \pm 2, \pm 4$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Observe que todos los coeficientes de f son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en $f(x)$ no podrá hacer que $f(x) = 0$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Observe que todos los coeficientes de f son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en $f(x)$ no podrá hacer que $f(x) = 0$
- Así, los únicos números que son raíces racionales potenciales son -1,-2,-4.

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Observe que todos los coeficientes de f son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en $f(x)$ no podrá hacer que $f(x) = 0$
- Así, los únicos números que son raíces racionales potenciales son -1,-2,-4.
- Comenzando con -1

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Observe que todos los coeficientes de f son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en $f(x)$ no podrá hacer que $f(x) = 0$
- Así, los únicos números que son raíces racionales potenciales son -1,-2,-4.
- Comenzando con -1

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
 & & -1 & -3 & -2 & -2 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & 2 & \boxed{2 = r}
\end{array}
$$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Ahora se comprobemos -2.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Ahora se comprobemos -2.
- Como el residuo es 0 entonces -2 si es una raíz.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\underline{2} & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
 & & -2 & -4 & -2 & -4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0 = r}
\end{array}
$$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Ahora se comprobemos -2.
- Como el residuo es 0 entonces -2 si es una raíz.
- Comprobamos si -2 es un raíz repetida dividiendo entre el cociente

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Tenemos que -2 es una raíz de multiplicidad 2.

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Tenemos que -2 es una raíz de multiplicidad 2.
- Del último cociente se tiene que $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Tenemos que -2 es una raíz de multiplicidad 2.
- Del último cociente se tiene que $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$.
- Es fácil ver que las raíces de (x^2+1) son los complejos conjugados i y $-i$

Ejemplo 7: Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de
$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

- Tenemos que -2 es una raíz de multiplicidad 2.
- Del último cociente se tiene que $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$.
- Es fácil ver que las raíces de (x^2+1) son los complejos conjugados i y $-i$
- Entonces:

$$f(x) = (x+2)^2(x-i)(x+i)$$

.

Ejemplo 8: Coeficiente no enteros

Determinar las raíces racionales de
$f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12} + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 8: Coeficiente no enteros

Determinar las raíces racionales de
$f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12} + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

- Si se multiplica f por el mínimo común denominador 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros:
  $g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9$.

Ejemplo 8: Coeficiente no enteros

Determinar las raíces racionales de
$f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12} + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

- Si se multiplica f por el mínimo común denominador 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros: $g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9$.
- Tenemos que c es una raíz de g también será una raíz de f.

Ejemplo 8: Coeficiente no enteros

Determinar las raíces racionales de
$f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12} + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

- Si se multiplica f por el mínimo común denominador 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros:
$g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9$.
- Tenemos que c es una raíz de g también será una raíz de f.
$\frac{p}{s} : \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{3}{10}, \pm\frac{9}{10}$

Raíces y factores de funciones polinomiales

Ejemplo 8: Coeficiente no enteros

Determinar las raíces racionales de
$f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12} + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

- Si se multiplica f por el mínimo común denominador 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros:
  $g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9$.
- Tenemos que c es una raíz de g también será una raíz de f.
  $\frac{p}{s} : \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{3}{10}, \pm\frac{9}{10}$
- Se puede comprobar que $-\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{2}$ son raíces de g y f.

Aproximación de los ceros reales

Una función polinómica o polinomial f es una función continua. Recuerde que eso es que $y = f(x)$ no tiene interrupciones (valores para los cuales no está definido). El resultado presentado en seguida es una consecuencia directa de la continuidad.

Aproximación de los ceros reales

Una función polinómica o polinomial f es una función continua. Recuerde que eso es que $y = f(x)$ no tiene interrupciones (valores para los cuales no está definido). El resultado presentado en seguida es una consecuencia directa de la continuidad.

Teorema (Valor medio)

Supóngase que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, y si N es cualquier numero numero entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces hay un número c en el intervalo abierto (a, b)para el que $f(c) = N$.

Considere la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Ejemplo 9: Aplicación del teorema de valor intermedio

- Con base en los datos mostrados en la tabla de abajo podemos concluir que f tiene un cero real en cada uno de los intervalos$[-2, -1]$,$[-1, 0]$ y $[1, 2]$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	1	-1	-3	1

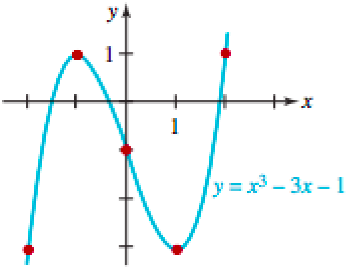
signos contrarios

Aproximación de los ceros reales

Considere la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Ejemplo 9: Aplicación del teorema de valor intermedio

- Sin embargo, al aplicar el teorema puede comprobarse que f no tiene ceros racionales y, por tanto, sus tres ceros reales son números irracionales.
- Como se observa en la gráfica de f cruza el eje x tres veces $(y = 0)$.



Aproximación de los ceros reales

Método de bisección

- La idea básica de este método parte del supuesto de que una función f es continua y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios tienen signos contrarios.
- Con esto se sabe que hay un número c en (a, b) para el cual $f(c) = 0$.
- luego el punto medio $m = (a + b)/2$ del intervalo $[a, b]$ es una aproximación a c.

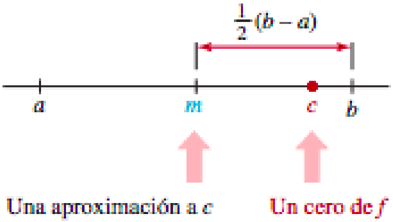
Aproximación de los ceros reales

Método de bisección

- si $m = (a + b)/2$ no es un cero de f, entonces hay un cero c con un intervalo (en el intervalo abierto (a, m) o en el intervalo(m, b),también abierto)
- donde los (a, m) (m, b) tienen la mitad de la longitud del intervalo original [a,b].
- ahora se debe determinar cual de los dos intervalos contiene la raíz

Método de la bisección.

- Si c se halla, por ejemplo, en (m, b), entonces se divide este intervalo más pequeño por la mitad: el nuevo punto medio es un cero o el cero c se encuentra en el intervalo que mide una cuarta parte de la longitud del intervalo original $[a, b]$.
- Al continuar de esta forma es posible localizar el cero c de f en intervalos sucesivamente más pequeños.



Aproximación de los ceros reales

GUÍA PARA APROXIMAR UN CERO

Sea f una función polinómica tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios.

i) Divida el intervalo $[a, b]$ a la mitad hallando su punto medio $m = (a + b)/2$.

ii) Obtenga $f(m)$.

iii) Si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos contrarios, entonces f tiene un cero en el intervalo $[a, m]$.
Si $f(m)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces f tiene un cero en el intervalo $[m, b]$.
Si $f(m) = 0$, entonces m es un cero de f.

Ejemplo 10: Aplicación del método de bisección

Obtenga una aproximación al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ con una precisión de hasta tres lugares decimales.

- Para lograr la precisión indicada el error debe ser menor de 0,0005, es decir $|c_{aproximada} - c| < 0{,}0005$
- La primera aproximación al cero en $[1, 2]$ es: $m_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ con error $\frac{1}{2}(2-1) = 0{,}5$

Ejemplo 10: Aplicación del método de bisección

Obtenga una aproximación al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ con una precisión de hasta tres lugares decimales.

- Como $f(1{,}5) = -2{,}15 < 0$, el cero deberá estar en $[1{,}5, 2]$.
- La segunda aproximación al cero es: $m_2 = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$ con error $\frac{1}{2}(2 - 1{,}5) = 0{,}25$.
- puesto que $f(1{,}75) = -0{,}89065 < 0$, el cero se ubica en [1.75,2]
- la tercera aproximación es $m_3 = \frac{1{,}75+2}{2} = 1{,}875$ con error $\frac{1}{2}(2 - 1{,}75) = 0{,}125$

Ejemplo 10: Aplicación del método de bisección

Obtenga una aproximación al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ con una precisión de hasta tres lugares decimales.

- Si se continua de esta forma a la postre se llegará a $m_1 1 = 1{,}879395$ con error $< 0{,}0005$
- Por tanto, el número 1,879 es una aproximación al cero de f en $[1, 2]$ con precisión de tres lugares decimales.

Ejemplo 10: Aplicación del método de bisección

- Para la identificación de las dos raíces restantes (los intervalos $[-2,-1]$ y $[-1,0]$).
- Es importante la elección del intervalo dado que $f(a)$ y $f(b)$ tengan el mismo signo, la función f podría tener uno o más raíces en $[a,b]$ (ver la figura).